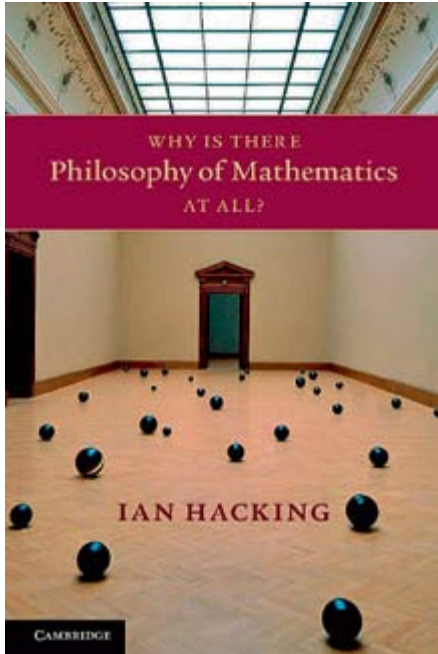


# Pensamiento matemático

Determinante en la disciplina científica de la mente



## WHY IS THERE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS AT ALL?

Por Ian Hacking. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

Según la tradición, Platón mandó inscribir en el dintel de la Academia de Atenas la leyenda «No entre quien sea ignorante en matemáticas». Con mayor razón hoy, no podemos conocer nada en profundidad si no entendemos la matemática subyacente. Al preguntarse en *What is Mathematics?* (1941) Richard Courant sobre la naturaleza de la matemática, aludía, para responder a la cuestión, a la experiencia activa de su cultivo. Comprendemos lo que son las matemáticas cuando las ejercitamos.

Matemática es la ciencia que se ocupa de los números y sus operaciones, interrelaciones, combinaciones y generalizaciones, así como de las configuraciones del espacio, estructura, medición, transformaciones y extensiones de las mismas. En su origen, el nombre designaba no solo geometría y aritmética, sino también de-

terminadas ciencias físicas (astronomía y óptica), que implican un razonamiento geométrico. Cuando el término se emplea en su sentido más amplio y abstracto, hablamos de matemática pura; sus aplicaciones concretas (la astronomía, la física o la teoría de probabilidades) conforman la matemática aplicada o mixta. Es una ciencia lógico-deductiva, en la que los conceptos primarios no están definidos (unidad, conjunción, correspondencia; punto, recta, plano) y las proposiciones son aceptadas sin definición (axiomas), a partir de lo cual se deriva una teoría a través de un razonamiento exento de contradicciones.

La filosofía de la matemática, o al menos la exposición filosófica de la matemática, ha desempeñado un papel importante en la cultura occidental desde Pitágoras. En cuanto disciplina, sin embargo, la filosofía de la matemática experimentó un cambio radical en los años finales del siglo XIX e inicios del siguiente. El giro supuso la incorporación del análisis de la infinitud de Cantor y el análisis del número de Frege; entrañó también la búsqueda de una coherente unificación con los *Principia Mathematica* (1910-1913), de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, cuyo título refleja su propósito: hacer en la matemática lo que Newton consiguió en física a través de sus *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Russell y Whitehead desarrollan en su extensa obra el programa logicista; matemática es la clase de proposiciones de la forma ' $p$  implica  $q$ ', donde  $p$  y  $q$  son proposiciones que obtienen una o más variables, igual en las dos proposiciones, y donde ni  $p$  ni  $q$  contienen otras constantes que las lógicas.

Una generación posterior a los *Principia Mathematica*, un grupo de jóvenes brillantes franceses, convino en escribir un manual definitivo de matemática. Se ampararon bajo el nombre de Nicolas Bourbaki. El primer volumen, una exposición impecable y

rigurosa de la teoría de conjuntos, apareció con el título de *Éléments de mathématique* (1939). Para ellos, matemática era el estudio de las estructuras. Desde ese enfoque fueron publicando manuales sobre álgebra, topología, teoría de Lie, etcétera.

La filosofía de la matemática, con su debate recurrente sobre si existe una realidad matemática externa (en espera de que la descubramos) o se trata de una creación humana (producto de la mente), constituye, a un tiempo, un tema formidable y fascinante. En cualquier caso, la matemática pura ocupa la cima del pensamiento racional. Los resultados matemáticos parecen ser paradigma de precisión, rigor y certeza, desde teoremas elementales sobre números y figuras geométricas hasta construcciones complejas de análisis funcional y teoría de conjuntos. Resultados y métodos que manifiestan una austera elegancia, diríanse propios de un arte. Por otro lado, medimos el rigor de una disciplina científica en razón del aparato matemático esgrimido.

Además de su relación con la naturaleza, pensar en la matemática es pensar en la prueba, cuestión de persistente interés. Para Wittgenstein, las matemáticas son técnicas de la prueba. Cierto es que no necesitamos pruebas para pensar matemáticamente. Como señalaba G. Hardy en su *Apology* (1940), «la función de un matemático es hacer algo, demostrar nuevos teoremas, añadir matemática». A la demostración de teoremas geométricos se dedicaron ya Tales y otros presocráticos, en el nacimiento de la filosofía jónica. Desde Euclides, la prueba ha constituido el patrón oro del avance de la matemática en Occidente. Hubo dos concepciones ideales de la prueba: la de Leibniz y la de Descartes.

En la metodología cartesiana, para aprehender la verdad debemos, tras reflexión y estudio, lograr una prueba entera e indivisa, de golpe. No lo explica en sus escritos matemá-

ticos, sino en las *Meditaciones*. En las *Reglas sobre la dirección del espíritu* habla de la intuición, entendida no como una percepción sensorial, sino como una concepción que permite adentrarnos en la naturaleza de las cosas de una manera fácil y distinta, sin lugar para la duda. La deducción, en cambio, significa cualquier conclusión necesaria a partir de otras cosas conocidas con certeza. La teoría de Leibniz sobre la prueba de una proposición necesaria —secuencia finita de sentencias— se convirtió en el ideal formalizado de los lógicos del siglo xx.

Sabemos, sin embargo, que hay muchos tipos de pruebas matemáticas, que tienen poco que ver con esos dos ideales. Abundan los argumentos que nos convencen de la verdad de proposiciones matemáticas, sin que constituyan una prueba. Pensemos en el argumento de Euler de que la suma infinita de recíprocos del cuadrado ( $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 \dots$ ) es  $\pi^2/6$ . No cumple las condiciones de prueba, pero resulta absolutamente convincente. Hasta el punto de que Mark Steiner y Hilary Putnam lo tomaron como ejemplo de conocimiento de un hecho matemático basado enteramente en un argumento plausible.

A la manera en que el lenguaje es específico de especie, es decir, una capacidad exclusiva de nuestra especie, también la matemática es específica de especie, aun cuando compartamos determinado sentido de los números con cuervos, delfines o macacos. La ciencia cognitiva sitúa ahora el «sentido de los números» en zonas cerebrales distintas de las que se activan en la sensibilidad espacial. Encontramos abundante trabajo matemático en todas las civilizaciones: Babilonia, Egipto, China y, posiblemente, Mesoamérica. Podríamos aventurar que, en cuanto una población inventaba la escritura, se hallaban listos para inventar la matemática. Pero ese podría ser un orden erróneo. Tal vez los habitantes de Mesopotamia inventaron la escritura para dejar constancia de los números. Cabe también la posibilidad de que los incas contaran con refinados sistemas de cómputo sin haber desarrollado la escritura, mediante ingenios tales como el *quipú* para el registro y la *yupana* para calcular.

La geometría es espacial. La aritmética sirve para contar, un proceso que Kant vincula al tiempo. No se quiere decir que no podamos trabajar en aritmética sin tiempo. Sin contar siquiera, podemos observar que un grupo consta de cuatro o incluso seis miembros. (A este proceso se le llama de repentinización: los niños pueden distinguir entre grupos de dos y tres. También lo hacen determinados animales no primates.) A partir de esa cifra, habrá que contar. El cálculo no es un proceso innato, sino aprendido. Cierto es que a simple vista podemos decir que un grupo es mayor que otro. Podemos declarar que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos emparejándolos.

De acuerdo con la exposición canónica de la historia de la matemática en Occidente, la geometría es griega y la aritmética comenzó en la India, de donde pasó a Persia y al islam. En justicia, la historia de la matemática es una historia de unificación y de diversificación. El álgebra es criatura de la aritmética. Para Kant, la aritmética formularía verdades sintéticas a priori de tiempo, mientras que la geometría constituye verdades sintéticas a priori de espacio. Se establecía en la *Geometría* de Descartes una estrecha relación entre geometría y aritmética. Con todo, las conexiones entre geometría y aritmética no empezaron con él. François Viète y Christopher Clavius le precedieron. Probablemente, la historia de la aritmética aplicada a la geometría se retrotraiga hasta la Casa de la Sabiduría de Bagdad, donde el álgebra maduró en el siglo x.

Ahora bien, si hay numerosos problemas de geometría que pueden resolverse convirtiéndolos en aritmética y álgebra, también abundan problemas de teoría de números y de álgebra cuya solución descubrimos al abordarlos geoméricamente. Hermann Minkowski, maestro de Einstein, se percató en 1907 de que la teoría especial de la relatividad podía conceptualizarse en un espaciotiempo tetradimensional. (Recurriendo a la geometría, Minkowski fue un innovador en teoría de números, en física matemática y en teoría de la relatividad.) La geometría no euclidiana de

Riemann se convirtió en el instrumento necesario para la relatividad especial. Andrew Wiles aplicó propiedades de las funciones elípticas para resolver el aritmético teorema de Fermat.

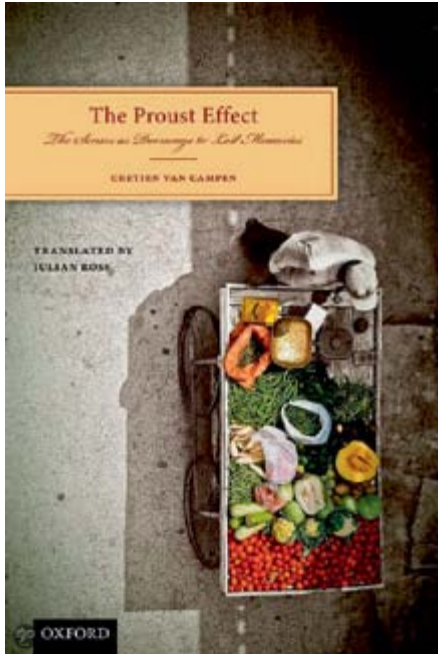
Hay en matemáticas otros muchos puntos de interés para el filósofo. Suelen citarse las antinomias, introducidas por la paradoja de Russell, los teoremas de incompletitud de Gödel, la hipótesis del continuo y, más generalmente, intuicionismo y constructivismo. ¿Son cuestiones matemáticas o cuestiones filosóficas los problemas generados por la computación, P/NP, por ejemplo? Entre matemáticos y filósofos se ha discutido largamente sobre si las pruebas pueden contrastarse por ordenador y sobre las pruebas generadas por ordenador. El ejemplo por excelencia es el teorema de los cuatro colores. La prueba se retrotrae a Appel y Haken (1977). Parte notable de la prueba relativa a alternativas posibles se reservó para la computación. Timothy Gowers, medalla Fields 1998, cree que dentro de un siglo los ordenadores suplantarán a los matemáticos.

Los matemáticos conocen una peculiaridad de su materia no fácil de explicar. A menudo, y tras un esfuerzo considerable, pueden compilar una lista de objetos matemáticos definidos por condiciones simples. La intuición les induce a creer que la lista es completa y buscan una prueba general de exhaustividad. De ese modo suelen descubrirse nuevos objetos, justamente al intentar mostrar dicha completitud. Tal los grupos finitos. El resultado constituye el teorema de clasificación. Los teoremas de clasificación desempeñan un papel importante en la matemática moderna. Lo que se considera prueba definitiva se publicó en 2004 (sometida siempre a la cautela de que cabe la posibilidad de que aparezca un contraejemplo). El primer teorema de clasificación de la historia humana fue la prueba de Euclides, que aparece en el libro XIII de los *Elementos* sobre la existencia de los cinco poliedros regulares. Primero muestra cómo construirlos y demuestra luego que todos se encuentran en ellos.

—Luis Alonso

# Memoria sensorial

## Bases neurales del efecto Proust



### THE PROUST EFFECT. THE SENSES AS DOORWAYS TO LOST MEMORIES

Por Cretien van Campen. Oxford University Press, Oxford, 2014.

Sensaciones y sentidos evocan, de forma enérgica y emotiva, recuerdos de nuestro pasado. Las emociones liberadas pueden ser positivas (placer y felicidad) o negativas (miedos y aversiones). El sabor o el gusto de un dulce desencadenan una respuesta muy intensa que nos devuelve a la infancia; una balada que creíamos olvidada nos transporta a la adolescencia. Los recuerdos sensoriales afectan a todos los sentidos. Un sonido, un paisaje o un suave rozamiento pueden evocarnos experiencias intensas de nuestra historia vivida.

Hace aproximadamente un siglo, el novelista francés Marcel Proust (1871-1922) describió esas vivencias en su obra *A la recherche du temps perdu*, donde relata cómo el olor y sabor de una magdalena devuelven a la infancia al protagonista, a sus colores, sabores y sentimientos. Es el

hilo que le conduce al pasado. La ciencia se ha interesado también por el «efecto Proust», y estudia las bases neurológicas de la evocación de recuerdos y su aplicación, por ejemplo, en el campo de la recuperación de la memoria. Por efecto Proust se entiende la liberación vívida, emotiva, involuntaria e inducida por los sentidos de acontecimientos del pasado.

No existe, en neurociencia, la memoria como entidad única, sino que poseemos varios sistemas interrelacionados de memoria. Hay memoria a corto plazo y memoria a largo plazo; memoria para los actos automáticos (conducir un coche) y memoria consciente; memoria para las emociones y memoria para nuestra historia personal, y muchas más. Cada tipo de memoria sigue su propia trayectoria en el cerebro. A menudo, esas memorias se entrecruzan. Sucede así, por ejemplo, cuando escuchamos, mientras conducimos, una vieja canción que nos resulta entrañable y nos olvidamos de cambiar la marcha.

La memoria a largo plazo utiliza dos fuentes: la memoria semántica y la memoria autobiográfica. Recurrimos a la primera para recuperar un conocimiento general (qué día es y dónde estamos). En la segunda almacenamos los recuerdos relacionados con acontecimientos de nuestra vida (por lo que se denomina también memoria episódica). La memoria autobiográfica se manifiesta a su vez en forma explícita y en forma implícita. La memoria explícita mantiene consciente la información factual sobre hechos pasados. La memoria

implícita expresa recuerdos que se prestan menos a ser ahormados en palabras; pensemos en los gestos o en los sentimientos. La memoria implícita se abastece de diversas fuentes, como la memoria emocional y la memoria motora. La memoria emocional expresa sentimientos físicos, estados de ánimo y otras emociones. De acciones que no alcanzan la conciencia es responsable la memoria motora.

En los recuerdos sensoriales intervienen diversas áreas del cerebro. Sabido es que, en el curso evolutivo, el cerebro ha configurado una estructura dividida en tres partes: tallo cerebral, o cerebro reptiliano, que controla la respiración, la circulación sanguínea, el estado de alerta y el sueño, entre otras funciones vitales; sistema límbico, que se hunde en el cerebro y desempeña una labor destacada en las funciones emocionales y conductuales (el cuidado de la progenie, la lucha o la respuesta de huida, el miedo o el amor); y corteza cerebral, o neocorteza, la región más potente del cerebro.

La corteza cerebral se divide en hemisferio izquierdo y hemisferio derecho. Cada uno se subdivide, a su vez, en cuatro lóbulos: lóbulo frontal, lóbulo parietal, lóbulo temporal y lóbulo occipital. Los lóbulos cumplen funciones específicas. Corresponde al lóbulo frontal la función de coordinar la recogida de información, la toma de decisiones y la dirección de movimientos. Las taras sensoriales descansan sobre otros lóbulos. El lóbulo temporal controla la audición; el parietal, el sentido del tacto,

y el occipital, la función visual. El sentido de la olfacción y el gusto se hallan distribuidos por diferentes regiones del cerebro, la más importante de las cuales reside en el sistema límbico.

Las amígdalas añaden coloración a las sensaciones al ordenar la liberación de hormonas asociadas con las emociones. Intervienen en el almacenamiento y recuperación de las impresiones. Pero, en rigor, las emociones adquieren gradualmente forma merced a la actuación del hipocampo, situado próximo a la amígdala y responsable de organizar los recuerdos. A él le compete reunir las trayectorias de los recuerdos que se dirigen hacia distintos dominios o proceden de diversos puntos. El hipocampo presenta una limitación: sugiere solo posibles direcciones, pero no distingue entre pasado, presente y futuro.

¿Cuáles son las trayectorias cerebrales recorridas en el proceso mnémico? Aunque se tardó mucho tiempo en redescubrir el efecto de Proust, el primer estudio científico del fenómeno se produjo al poco de la aparición de la ficción literaria. En una investigación psicológica llevada a cabo en la Universidad neoyorquina Colgate, en 1935, se preguntó a 254 personas (varones y mujeres) si habían sentido alguna vez que la percepción de un aroma les evocaba un recuerdo infantil intenso. Una mayoría reconoció haber pasado por esa experiencia, con predominio de las mujeres sobre los varones. Uno de cada cinco varones reconocía el recuerdo del aroma, frente a nueve de cada diez mujeres capaces de lograrlo. La memoria sensorial suele comenzar con un estado de ánimo y un sentimiento indefinidos que el sujeto no acierta a identificar y ubicar. Solo más tarde se percata del mismo y le confiere el contexto originario, con sus impresiones para revivir de nuevo la experiencia.

¿Pueden los estímulos sensoriales despertar recuerdos distintos de los evocados por las palabras? Medio siglo después del experimento de Nueva York, David Rubin y sus colegas, de la Universidad Duke, se aprestaron a someter a prueba experimental varias hipótesis entonces en boga. Los

investigadores presentaron a un grupo de estudiantes quince olores familiares en tres formas: olores que se ofrecían a la olfacción, imágenes que representaban olores y textos escritos que describían olores. A los voluntarios se les preguntó cuán reales les parecían o cuán agradables les resultaban tales estímulos. El análisis estadístico de las descripciones no reveló diferencias notables entre las reacciones ante los olores reales, las representaciones o los textos. La única divergencia estribaba en que los olores reales evocaban con mayor frecuencia un recuerdo que el sujeto pensaba que había perdido para siempre.

A finales de los años noventa, Simon Chu y John Joseph Downes, de la Universidad de Liverpool, descubrieron que el efecto Proust no se hallaba vinculado a una edad determinada. Visitaron a un grupo de ancianos con un promedio de edad de 70 años e investigaron sus recuerdos olfativos. A los probandos se les presentaron dos tipos de estímulos: aromas reales y palabras relacionadas con un aroma; se solicitó de ellos que describieran los recuerdos promovidos por los estímulos en cuestión. Anotaron el año del recuerdo evocado. Los análisis mostraron que la olfacción de olores reales evocaba unos recuerdos más antiguos que los evocados por las palabras relacionadas con aromas: los olores despertaban recuerdos que se remontaban a entre los seis y los diez años de edad de los sujetos, mientras que las palabras retrotraían el recuerdo de los once a los veinticinco años. Otros investigadores han sostenido que los recuerdos infantiles emotivos, en particular los traumáticos, son difíciles de evocar a través de los textos (relatos, diarios), pero pueden despertarse utilizando claves situacionales, como las percepciones y sensaciones del entorno.

¿Por qué perdemos los recuerdos de nuestra infancia? Para la mayoría de los adultos, la edad de los primeros recuerdos se reseña en torno a los tres años, aunque hay diferencias muy pronunciadas entre unos individuos y otros. El número de recuerdos de los siete primeros años es menor de lo que cabría suponer de una ero-

sión normal, lo que significa que se produce una tasa acelerada de olvido por lo menos hasta los once años. ¿Difieren de las memorias verbales las memorias sensoriales? Rachel Herz y su equipo, de la Universidad Brown, acometieron, a comienzos de los noventa, una serie de experimentos en los que demostraron que los recuerdos olfativos no eran verbales. Solicitaron a los voluntarios que oliesen diferentes aromas y describieran los recuerdos que estos desencadenaban. En un tercio de los casos, los voluntarios se mostraron incapaces de verbalizar el aroma.

¿Existe una explicación neurológica de las observaciones de Proust? Para Joseph Le Doux, los sucesos emotivos dejan su huella en dos sistemas mnémicos: por un lado, el sistema de memoria consciente, que registra los hechos de los acontecimientos (quién, qué, dónde, cuándo), y, por otro, el sistema de memoria que registra las emociones e impresiones del suceso en el subconsciente. Le Doux describía esos dos sistemas como memoria explícita y memoria implícita, respectivamente. Hay varias regiones cerebrales implicadas. Hemos adelantado el papel de la amígdala en la coloración emocional de experiencias y recuerdos mediante la liberación de hormonas. Posteriormente, el hipocampo añade sustancia a la memoria, mediante la activación de vías mnémicas hacia partes del cerebro que procesan los sentidos. Los recuerdos se hallan ampliamente distribuidos en el cerebro. El hipocampo, esencial para nuestra orientación espacial, ayuda a recuperar esos recuerdos. En el hipocampo se generan nuevas neuronas, que se integran sinápticamente y aportan sustrato potencial para un nuevo aprendizaje.

No olvidemos, en efecto, que los mecanismos neurales subyacentes a los recuerdos implican mecanismos de plasticidad sináptica, tales como la potenciación a largo plazo y la depresión a largo plazo. El efecto Proust resulta prácticamente imposible de demostrar en el laboratorio, porque se presenta de manera involuntaria y no puede aprenderse por adelantado.

—Luis Alonso