

**SUMMING IT UP**  
**FROM ONE PLUS ONE TO MODERN NUMBER THEORY**

Avner Ash y Robert Gross  
 Princeton University Press, 2016

## Teoría de números

*Una introducción a las formas modulares no apta para todos los públicos*

La teoría de números resulta fascinante, entre otras cosas, porque muchas de las preguntas o conjeturas que maneja son fáciles de entender por el público general. Sin embargo, las respuestas o las demostraciones suelen ser extremadamente difíciles y técnicas, hasta el extremo de que, a menudo, los especialistas han tardado siglos en resolverlas y muchas siguen aún abiertas.

En el intento de solucionar tales problemas, de apariencia tan inocente que parecen sacados de un libro de pasatiempos, se han generado una gran cantidad de nuevas matemáticas e incluso áreas que antes no existían. La primera frase de *Summing it up*, «Sumar dos números enteros es una de las primeras cosas que aprendemos en matemáticas», es, en este sentido, toda una declaración de intenciones.

El tema principal del libro será jugar con las sumas, y ese juego nos llevará de manera natural a su objetivo principal: las formas modulares, el instrumento del análisis complejo más fecundo en la teoría de números moderna. Que, como ejemplo de lo que comentábamos antes, ha acabado aplicándose a áreas tan aparentemente alejadas de su nacimiento como la teoría de cuerdas o la topología algebraica.

Los autores de *Summing it up*, Avner Ash y Robert Gross, son profesores de matemáticas en el Boston College. Esta obra es la última de una trilogía sobre teoría de números pensada para un público con conocimientos generales de matemáticas. Fue antecedida por *Elliptic tales: Curves, counting, and number theory* primero y luego por *Fearless symmetry: Exposing the hidden patterns of numbers*,

de los mismos autores y publicados también por Princeton University Press. El primer libro discute cuestiones como las ecuaciones diofánticas y el último teorema de Fermat. El segundo trata sobre problemas relacionados con las curvas elípticas, como la conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer, uno de los famosos Problemas del Milenio del Instituto Clay. Los tres libros pueden leerse de manera independiente.

*Summing it up* está dividido en tres partes. La primera, «Sumas finitas», comienza con una aburrida lista de conceptos básicos en teoría de números: máximo común divisor, identidad de Bézout, primos, congruencias, teorema de Wilson, residuos cuadráticos... para pasar después a abordar la cuestión, respondida en su momento por Fermat, de qué números pueden expresarse como suma de dos cuadrados.

Una vez se está enganchado al problema, resulta inevitable que surjan más preguntas similares: ¿qué números pueden expresarse como suma de tres, cuatro o cinco cuadrados? Hasta llegar, en el capítulo 3, a la demostración, debida originalmente a Legendre, de que todo entero positivo puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados, y acabar con el mismo problema generalizado más allá de los cuadrados a potencias arbitrarias  $k$ . La generalización se conoce como problema de Waring, y hoy en día sigue siendo objeto de investigación.

Tras este calentamiento, el libro pasa a abordar en el capítulo 5 sumas como  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  y  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ , hasta alcanzar la idea de Pascal para sumar  $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$  usando series telescópicas. De manera natural, apare-

cen así los números y los polinomios de Bernoulli.

La segunda parte, llamada «Sumas infinitas», comienza con una digresión sobre series geométricas, series binomiales y su extensión a potencias reales. Sigue con la presentación de la función exponencial en variable compleja, las series de potencias y el concepto de continuación analítica. Se presenta la función zeta de Riemann y su conexión con los números de Bernoulli, así como el concepto de función generatriz y de series de Dirichlet para realizar un primer acercamiento al famoso problema de las particiones: ¿de cuántas maneras podemos escribir un número  $n$  como suma de otros enteros positivos?

Si hasta aquí llevamos unas 120 páginas, la tercera parte, titulada «Formas modulares y sus aplicaciones» ocupa casi el mismo espacio. Tras comenzar con nociones de geometría hiperbólica y teoría de grupos, se definen las transformaciones lineales fraccionarias y, finalmente, las formas modulares.

Tradicionalmente, cierto tipo de funciones han recibido el nombre de «formas»; por ejemplo, un polinomio  $f(\mathbf{v})$  es una «forma de peso  $k$ » si  $f(a\mathbf{v}) = a^k f(\mathbf{v})$ . Una forma modular de peso  $k$  se define como una función  $f(z)$  analítica en el semiplano superior complejo, que cumple:

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),$$

(donde  $a, b, c$  y  $d$  son los elementos de una matriz bidimensional de determinante uno,  $ad - bc = 1$ ) y cuyo módulo permanece acotado cuando la parte imaginaria tiende a infinito. Tras presentar las expansiones- $q$ , las series de Eisenstein y los grupos congruentes, se acaba retomando el problema de las particiones presentando la relación entre la función de partición, introducida previamente, con las formas modulares [véase «El oráculo de Ramanujan», por Ariel Bleicher; INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, agosto de 2014].

Según los autores, con conocimientos elementales de álgebra y geometría de bachillerato, y con conocimientos básicos sobre series infinitas y cálculo diferencial e integral, el libro puede seguirse. La obra ambiciosa, tal y como se explicita en prefacio, hacer comprensible a una audiencia con nociones generales de matemáticas ciertas ideas de la teoría de números. Los autores parecen creer que el libro puede ser entendido por lectores que solo han cursado un año de cálculo. Desde mi punto de vista, se trata de una pretensión muy optimista, por no decir descabellada.

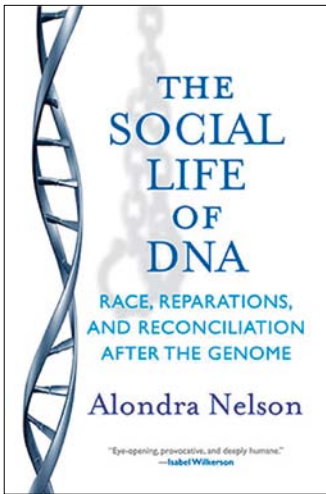
Dudo que pueda escribirse un libro sobre formas modulares accesible para estudiantes con ese nivel. Es cierto que Ash y Gross se toman su tiempo en definir términos y conceptos matemáticos generales, como espacio vectorial o grupo. Pero siempre lo hacen brevemente por razones de espacio, y parece necesario un alto grado de madurez matemática para seguir los razonamientos. Se necesita tiempo y cierta familiaridad con tales cuestiones para asimilar todos los nuevos conceptos antes de pasar a los

siguientes. Por ejemplo, en poco más de diez páginas, se pasa de las transformaciones de la función exponencial en el plano complejo y la geometría hiperbólica, a grupos matriciales y transformaciones lineales fraccionarias. Algo que, sin duda, resultará excesivo para alguien que carezca de una buena formación matemática.

Si bien no recomendaría el libro al público que proponen los autores, sí que lo haría a profesionales interesados en una introducción a las formas modula-

res. Resulta difícil encontrar literatura accesible y el libro es una buena primera aproximación al tema. Más allá de eso, creo que la obra refleja, con la selección de temas y la forma de presentarlos, la actividad que desarrollan los matemáticos que trabajan en teoría de números. En palabras de Ash y Gross: «La pregunta genera teoría, la teoría genera nuevas preguntas, y las conjeturas nos guían a lo largo del camino».

—Bartolo Luque  
Universidad Politécnica de Madrid



**THE SOCIAL LIFE OF DNA  
RACE, REPARATIONS, AND RECONCILIATION  
AFTER THE GENOME**

Alondra Nelson  
Beacon Press, 2016

## Raíces

*Repercusiones sociales de los avances genéticos*

Los análisis genéticos, incluidos los aplicados al origen de los europeos, han resultado determinantes para esclarecer aspectos oscuros de la historia de las poblaciones. La investigación de las modernas diásporas africanas llegadas a Estados Unidos se halla todavía en una fase inicial, condicionada por las limitaciones que rodean el conocimiento del fenómeno de la esclavitud. Una vez en América, las familias fueron divididas y vendidos sus miembros como esclavos, en transacciones a menudo orales, sin papeles ni registros, o se destruyeron los pocos que hubiere. Los africanos transportados en barcos a Norteamérica a través de un viaje tortuoso, conocido como *Middle Passage*, perdieron sus señas de identidad en un proceso de racialización. Dejaron de ser personas; eran solo negros. Al margen de su lengua, religión y formación cultural nativas, el esclavo quedó reducido a negro, siervo despojado de todo vínculo con un pasado.

Socióloga experta en temas de raza, etnia y ciencia, Alondra Nelson ha sido

directora del Instituto de Estudios sobre Mujer, Género y Sexualidad de la Universidad de Columbia. La investigación sobre su propio pasado le llevó a la redacción de *The social life of DNA: Race, reparations, and reconciliation after the genome*. Anhelaba saber hasta qué punto los tests genéticos fundamentaban las teorías raciales. La experiencia mostraba su eficacia en el foro y en medicina, pero ¿en qué medida permitían averiguar la historia genealógica del individuo, de sus parientes y de su pueblo?

Los estudios craneométricos de los restos esqueléticos habían arrojado luz sobre la nutrición, enfermedades y estragos de la esclavitud; la morfología dentaria aportaba las firmas químicas del origen y el entorno del individuo; en particular, la concentración relativa de estroncio 86 y estroncio 87. La prueba genética a la que se sometió la propia autora mostró su parentesco con la población bamileke del Camerún. (Desde entonces, le afecta todo lo relacionado con ese país como si se tratara de algo propio.)

Para iniciarse en el campo hay que leer *A narrative of the life and adventures of Venture, a native of Africa, but resident above sixty years in the United States of America, related by himself*, de Venture Smith (1729-1805). Fue este un esclavo que en 1798 dictó sus memorias a Elisha Niles. Sus recuerdos pintan un cuadro valioso, por único, de un aborigen de África occidental que fue llevado a América y esclavizado. Detalla su vida en Dukandarra, Guinea, el nombre de su padre (Saungm Furro), el suyo propio (Broteer Furro) y su captura a manos de una partida extranjera encabezada por un tal Baukurre. Tras cumplir con sus obligaciones de esclavo, sacaba horas extra que le permitieron comprar su libertad en 1765. Continuó trabajando y, entre 1769 y 1775, pagó la libertad de su mujer y la de sus tres hijos.

El interés en los orígenes africanos recibió un impulso determinante en 1977 con la publicación de *Black genealogy*, de Charles L. Blockson. Ese mismo año quedó establecida la Sociedad Histórica y Genealógica Afroamericana, la primera institución negra dedicada a la genealogía y la historia de las familias. La genealogía es la segunda afición en importancia entre los estadounidenses. Se recurre al análisis genético para desmadejar el enredo de la esclavitud en beneficio de la reconciliación del individuo con su pasado, para establecer la casa paterna, replantearse la ciudadanía y restañar las heridas abiertas de los años de humillación. En la praxis de la genealogía intervienen diversas herramientas técnicas; entre ellas, el Marcador del Árbol de Familia y otros programas informáticos.

Las raíces genéticas han llegado hasta los padres de la patria, con las repercusiones sociales y políticas que ello conlleva. ¿Fue Thomas Jefferson progenitor de los

hijos de Sally Hemings, su esclava negra? El análisis del ADN de los descendientes fue una de las primeras aplicaciones de la técnica genética en Estados Unidos. Se compararon genes de descendientes reconocidos de Jefferson con los de los presuntos sucesores.

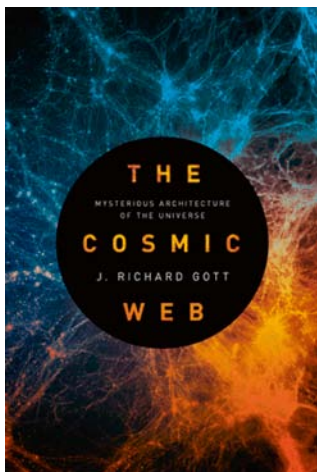
El análisis se centró en determinadas secuencias del cromosoma Y para determinar si había lazos familiares. Este ADN pasa de padres a hijos en su mayor parte intacto, por lo que puede emplearse para trazar una línea directa de antepasados masculinos. En este caso, se comparó el ADN del cromosoma Y de los descendientes masculinos del tío paterno de Jefferson con el de los descendientes de dos vástagos de Hemings. El padre del menor de los hijos de Hemings era Jefferson. El hijo de una esclava compartía su genoma con un padre fundador.

No sería el único. Años más tarde, otros que aducían descender de James Madison (redactor de la constitución estadounidense y sucesor de Jefferson en la presidencia de la nación) se aprestaron a recurrir a la misma estrategia para demostrar su lugar en el clan y en la historia del país. Había abundantes pruebas históricas que lo avalaban, pero una parte se negó a someterse al examen genético. En junio del año 2000, concluida la secuenciación del genoma humano, el presidente Bill Clinton declaraba que de la triunfante expedición al corazón del genoma humano emergía la constatación de que todos los seres humanos, cualquiera que fuera su raza, eran iguales en un 99,9 por ciento. El hecho más importante de la vida sobre la Tierra era la humanidad común.

Pese a ello, en 2014 Nicholas Wade publicó un incendiario *A troublesome*

*inheritance: Genes, race, and human history*. Contra toda prueba científica, Wade afirmaba allí que había tres razas biológicamente distintas: africana, asiático-oriental y caucasiana, dotada cada una de un comportamiento social distinto e inviolable. En razón de esas diferencias se explicaban las diversas sociedades humanas. Wade atribuye el esplendor de Occidente a los genes superiores de los caucásianos, que producían sociedades emprendedoras, mientras que los genes africanos producían culturas de violencia y recelo, y los asiático-orientales, prácticas de disciplina rígida y estratificación. La herencia genética de estos dos últimos grupos impedía el desarrollo de la sociedad y su cohesión. El texto fue desacreditado por la ciencia. Carecía de base experimental y le sobraba ideología.

—Luis Alonso



**THE COSMIC WEB  
MYSTERIOUS ARCHITECTURE OF THE UNIVERSE**

J. Richard Gott  
Princeton University Press, 2016

**Topología del cosmos**

*Un universo esponjiforme*

El libro de la naturaleza, afirmó Galileo Galilei, está escrito en lenguaje matemático; sus símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas. Así ocurre con la disposición de las galaxias en el universo. Para entenderla hay que acudir a la matemática, en particular a la topología, rama que estudia las propiedades de las figuras geométricas que permanecen inalteradas tras la distorsión. Debemos a J. Richard Gott, profesor de astrofísica de la Universidad de Princeton, la idea de un universo esponjiforme, constituido por cúmulos y filamentos galácticos intrincadamente conexos entre sí. Una estructura poderosa denominada «red cósmica», cartografiada extensamente, que representaría el origen del cosmos y su evolución a lo largo de los miles de millo-

nes de años transcurridos. La esponja cósmica de Gott se inspiró en la morfología de la esponja marina.

Gott tenía dieciocho años cuando descubrió un grupo de estructuras similares a esponjas, entrelazadas, hechas de triángulos, cuadrados, pentágonos o hexágonos, algunas de las cuales dividían el espacio en dos regiones iguales. Eran poliedros regulares esponjiformes: figuras compuestas de polígonos regulares cuya disposición en torno a cada vértice es idéntica. Había aprendido en el bachillerato que los griegos de la Antigüedad clásica reconocían la existencia de cinco poliedros regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). El adolescente precoz pensó entonces que no estaba todo dicho. Le había precedido

Johannes Kepler en esas dudas sobre la doctrina clásica de los cinco sólidos platónicos. Kepler creía que las teselaciones poligonales regulares del plano debían considerarse también poliedros.

*The cosmic web* arranca con esos recuerdos y con los pioneros de la astronomía extragaláctica, Edwin Hubble y Fritz Zwicky. Suele afirmarse que Hubble (1889-1953) descubrió el universo. Si, con su microscopio elemental, Leeuwenhoek descubrió el mundo microscópico, Hubble utilizó el telescopio de 100 pulgadas de diámetro de Monte Wilson para descubrir el universo macroscópico. Antes de Hubble se sabía que vivíamos en la Vía Láctea, de la que ahora conocemos que es un disco en rotación de 300.000 millones de estrellas. (Sirio, la estrella más brillante del firmamento, se encuentra a unos 9 años luz de la Tierra.) En 1918 nuestra percepción del lugar que ocupamos en el mundo comenzó a cambiar. Harlow Shapley descubrió que el Sol no ocupaba el centro de la Vía Láctea, sino que residía a medio camino de la periferia. Así como Copérnico sacó la Tierra del centro del sistema solar y puso al Sol en el centro, Shapley sacó al sistema solar del centro de la Vía Láctea y lo ubicó en los arrabales. Pero el gran descubrimiento de 1918 sería pronto eclipsado, en dos ocasiones, por Hubble.

Hubble estudió la nebulosa de Andrómeda, considerada una nube de gas en el interior de la Vía Láctea. Descubrió que Andrómeda era, en realidad, una galaxia, del tamaño aproximado de la Vía Láctea

y muy distante. Había, además, otras muchas nebulosas espirales en el universo, todas ellas galaxias. Clasificó las galaxias por su forma: elípticas, espirales e irregulares. Apuntó el telescopio en diferentes direcciones y contó el número de galaxias vistas. Parecía que hubiera una cuantía similar en todas las direcciones: el universo era homogéneo. Hubble no se detuvo. Calculó la distancia a que se encontraban tales galaxias. A partir de los espectros de las galaxias, midió su velocidad. Se percató de que, cuanto más alejada se encontraba una galaxia, con mayor rapidez se distanciaba de nosotros. El universo entero se hallaba en expansión. Si el universo no era estático, como pensaron Newton y Einstein, entonces no podía ser infinitamente viejo.

En los años treinta, cuando era profesor de física en el Instituto de Tecnología de California, Zwicky (1898-1973) acometió la primera inspección telescópica moderna del firmamento nocturno. A él debemos el cambio profundo en la comprensión del universo. Antes de Zwicky, persistía arraigada la concepción aristotélica de la esfera celeste como una región de armonía y tranquilidad eternas; para el astrónomo se reservaba la tarea de levantar mapas precisos de un panorama inmutable. Con Zwicky emergió una nueva visión del universo, una realidad dinámica dominada por episodios violentos. Convenció al Caltech para que comprara una cámara Schmidt de 18 pulgadas y la instalara en el Observatorio de Monte Palomar. Entendió Zwicky que, para observar episodios raros, violentos y de corta vida, tenía que fotografiar repetidamente zonas extensas del firmamento. De su inspección emergieron dos descubrimientos importantes: las supernovas y la materia oscura. Zwicky observó 20 supernovas, muestra suficiente para permitirle clasificarlas en distintos grupos e inferir sus diferentes modos de originarse. Su descubrimiento de la materia oscura se produjo al estudiar el movimiento de las galaxias en los cúmulos y calcular que la masa visible de estos no bastaba en absoluto para causar los movimientos observados.

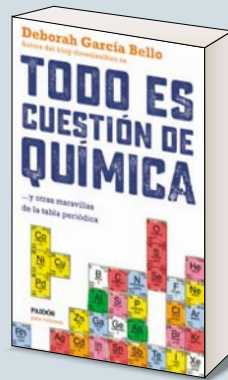
Durante la Guerra Fría, la escuela estadounidense de cosmología privilegió un modelo de universo donde las galaxias residían en cúmulos aislados. Por su parte, la escuela soviética favorecía un modelo de universo en panel, con galaxias perfiladas por vacíos aislados e inmensos. Gott, que junto con Mario Jurić midió la Gran

Muralla Sloan de galaxias (con una longitud de 1370 millones de años luz, una de las mayores estructuras del universo), publicó, junto con M. Dickinson y A. Melott, su modelo esponjiforme en 1986: «The sponge-like topology of large-scale structure in the universe», aparecido en *Astrophysical Journal*. El universo era una suerte de esponja con galaxias que

tejían una densa red cósmica. Esa telaraña emergió como resultado de la gran explosión y se transformó desde un tamaño subatómico hasta adquirir proporciones cósmicas. La hipótesis de Gott, apuntada en la teoría de la inflación cósmica, ha sido corroborada por la contrastación telescópica.

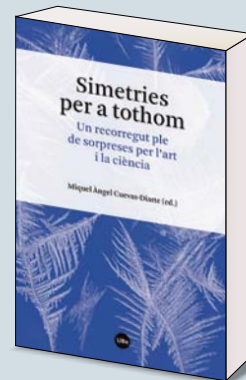
—Luis Alonso

## NOVEDADES



### TODO ES CUESTIÓN DE QUÍMICA ... Y OTRAS MARAVILLAS DE LA TABLA PERIÓDICA

Deborah García Bello  
Paidós, 2016  
ISBN: 978-84-493-3188-6  
288 págs. (16,95 €)



### SIMETRIES PER A TOTHOM UN RECORREGUT PLE DE SORPRESES PER L'ART I LA CIÈNCIA

Dirigido por Miquel Àngel Cuevas-Diarte  
Edicions Universitat de Barcelona, 2016  
ISBN: 978-84-475-3979-6  
224 págs. (22 €)



### DESAFÍOS DEL FUTURO DOCE DILEMAS Y TRES INSTRUMENTOS PARA AFRONTARLOS EN EL DUODÉCIMO MILENIO

Pere Puigdomènech  
Crítica, 2016  
ISBN: 978-84-16771-03-5  
300 págs. (21,90 €)



### AGUJEROS NEGROS CÓMO UNA IDEA ABANDONADA POR NEWTON, ODIADA POR EINSTEIN Y RETOMADA POR HAWKING VUELVE A ENAMORARNOS

Marcia Bartusiak  
Ariel, 2016  
ISBN: 978-84-344-2402-9  
260 págs. (19,90 €)