



**ON THE BRINK OF PARADOX
HIGHLIGHTS FROM THE INTERSECTION
OF PHILOSOPHY AND MATHEMATICS**

Agustín Rayo
MIT Press, 2019
320 págs.

Matemáticas con filosofía y filosofía con matemáticas

De Cantor a Gödel pasando por Bayes

Si usted disfrutaba, como yo, con las columnas de «Juegos matemáticos» de Agustín Rayo en *Investigación y Ciencia*, está de enhorabuena. Rayo sigue siendo profesor de filosofía en el Instituto de Tecnología de Massachusetts, y el éxito que tuvo un curso que impartió allí basado en parte en aquellas columnas ha acabado cristalizando en *On the brink of paradox* («Al borde de la paradoja»), editado por MIT Press el año pasado.

A pesar del título, y como ya avisa el autor, la obra no es una colección de paradojas —aunque desde luego aparecen unas cuantas—, sino una exploración de la intersección entre filosofía y matemáticas, como bien reza el subtítulo. Para entender qué quiere decir esto, déjenme que les explique la idea tomando como ejemplo la primera parte de las tres en que Rayo ha dividido la obra: «Infinito», «Decisiones, probabilidades y medidas» y «Computabilidad y el teorema de Gödel».

Rayo comienza su exposición con un clásico de la divulgación matemática: el hotel de Hilbert. Plantea así la aparente paradoja de que un subconjunto pueda tener tantos elementos como el conjunto al que pertenece, y nos cuenta cómo Cantor, a finales del siglo XIX, deshizo el entuerto usando la biyección entre conjuntos infinitos para determinar sus cardinalidades relativas. Seguidamente nos demuestra que los racionales poseen la misma cardinalidad que los naturales y que los reales poseen una cardinalidad mayor.

Hasta aquí lo que podríamos encontrar en un buen artículo de divulgación matemática, como la columna «El infinito» que Rayo escribió en diciembre de 2008 para esta revista. Ese ensayo de dos páginas acaba diciendo: «Cantor [...] probó también que un conjunto siempre tiene más subconjuntos que elementos. De esto se sigue que hay más subconjuntos de números

reales que números reales, y más subconjuntos de subconjuntos de números reales que subconjuntos de números reales, y así sucesivamente. ¡Hay infinitos tamaños de infinito!». Un final que, a propósito, deja al lector con ganas de saber más.

En su libro, Rayo ofrece esa profundidad que por falta de espacio era imposible en una columna. Y lo logra de forma magistral, ofreciendo demostraciones del teorema de Cantor, definiendo la potenciación de conjuntos, el principio de la aditividad contable, los ordinales y su aritmética, y rematando todo con una discusión sobre la hipótesis del continuo. Digo que lo hace magistralmente porque, aparte de lo que nos cuenta, también nos ayuda a recorrer el camino por nosotros mismos a través de pequeños ejercicios cuyas respuestas aparecen al final de cada capítulo. De hecho, los dos primeros son la mejor exposición sobre el tema que he leído nunca.

Esta primera parte concluye con una serie de paradojas, puntuadas por dificultad e interés del 1 al 10 según la simpática escala del filósofo Mark Sainsbury, que, en su mayoría, involucran de una forma u otra el infinito. Rayo nos enganchó a algunas de ellas en columnas como «Cartas, monedas y sombreros» (febrero de 2009), «Sombreros e infinitos» (abril de 2009), «Los prisioneros y María» (agosto de 2009) o «El juego del diablo» (octubre de 2010). Ahora, el lector puede profundizar en ellas y en muchas otras tanto en el libro de cabecera como en las múltiples recomendaciones de lectura que hace Rayo en él.

En la introducción aparecen dos figuras que me han parecido sobresalientes. La primera es un grafo que nos permite decidir el orden de lectura de los capítulos según nuestros intereses: si, por ejemplo, nos interesa el capítulo 8, antes se nos recomienda leer el 7 y el 1. La segunda es una gráfica que indica la dificultad matemática

y filosófica de cada capítulo, evaluada de 0 a 100. Así, los dos primeros puntúan alto en matemáticas y bajo en filosofía, mientras que en el tercero ocurre lo contrario: la discusión resulta más filosófica que matemática. Curiosamente, la dificultad matemática y la filosófica parecen estar en oposición de fase a lo largo de la obra.

El siguiente bloque, «Decisiones, probabilidades y medidas», puede parecer un cajón de sastre, pero eso no constituye un demérito, sino uno de los atractivos de la obra. Comienza tratando los viajes temporales y la paradoja del abuelo, extendiendo una vez más algunas de sus columnas, como «Viajes a través del tiempo» (octubre de 2009) y «¿Cómo sería el mundo si pudiéramos viajar al pasado?» (febrero de 2016), donde lo que realmente se discute es el libre albedrío. Después continúa con «El problema de Newcomb» (septiembre de 2008), donde se consideran la teoría causal de la decisión y su relación con el dilema del prisionero.

El corazón de este bloque, la teoría de la probabilidad, fue tratado someramente por Rayo en «¿Qué es la probabilidad?» (junio de 2011). Y, una vez más, a través de ejercicios guiados, recibimos un breve pero completo baño en teoría de la probabilidad, donde se abunda en la probabilidad subjetiva, el principio de indiferencia o cómo incorporar nueva información en coherencia con la ley de Bayes, por citar algunas cuestiones relevantes y prácticamente ausentes en la mayor parte de los textos académicos para universitarios. Por supuesto, todo salpicado con nuevas paradojas, como la de San Petersburgo o «La paradoja de los dos sobres» (junio de 2012).

El último bloque, dedicado a la computabilidad y el teorema de Gödel, vuelve a ser un excelente texto tan introductorio como riguroso a las máquinas de Turing y al concepto de función computable, donde se discute la famosa conjetura «P = NP» (abril de 2010) o cómo escribir el número más grande posible, una extensión de «El duelo de los números grandes» (agosto de 2008). Para acabar, tenemos una demostración del teorema de incompletitud de Gödel y su impacto filosófico («Gödel y la verdad axiomática», febrero de 2014), donde sin embargo se excluye una demostración basada en la noción de complejidad de Kolmogórov con la que Rayo nos sedujo en abril de 2012 en la columna «Ordenadores y números naturales», la cual les recomiendo leer si no lo hicieron en su momento.

El anterior libro de Rayo, *The construction of logical space*, editado por Oxford University Press en 2013, fue traducido al español dos años después como *La construcción del espacio de posibilidades* por el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México. Ojalá se repita la historia con esta nueva obra, que, aunque

no sea para un público completamente general, es un raro diamante. Aborda ideas poco corrientes en los programas de estudio, como la teoría de la medida («Colecciones no medibles», octubre de 2012), el axioma de elección o «El teorema de Banach-Tarski» (diciembre de 2009), que por sí mismos ya la harían merecedora de un lugar en las bibliotecas

universitarias. Y para alguien de ciencias como yo, es una novedad leer sobre cómo los filósofos modernos proponen, discuten e iluminan todos estos temas. Por ello también merece y se ha ganado un lugar en mi biblioteca.

—Bartolo Luque
Universidad Politécnica de Madrid



**LA MÁQUINA QUE CAMBIÓ EL MUNDO
GÉNESIS, DESARROLLO Y EVOLUCIÓN
DEL ORDENADOR**

Salvador Lucas Alba
Ediciones Complutense, 2019
205 págs.

**Una historia de la
computación para los
informáticos del futuro**

La génesis y desarrollo del ordenador más allá de Turing, Church y Von Neumann

Resulta difícil sobreestimar la importancia del ordenador en nuestra sociedad. ¿Todavía piensa el lector que eso a lo que llama móvil es un teléfono? No: se trata de un ordenador que, entre otras muchas funciones, permite realizar llamadas telefónicas. ¿Cree que lo que conduce es un coche? Cada vez más, los automóviles se están transformando, para bien o para mal, en computadoras con ruedas y motor. Y eso por no hablar de televisores, neveras y otros aparatos: la famosa Internet de las cosas traerá millones de ordenadores conectados, disimulados, por ejemplo, en nuestra ropa o incluso en el interior de nuestro cuerpo.

La aparición del ordenador constituye un hecho singular y único en la historia. Por primera vez tenemos a nuestra disposición una máquina universal, capaz de emular, o simular, a cualquier otra máquina. Obviamente, esa naturaleza universal hace que la primera vez que aparece un ingenio semejante sea también la última: un hito en la historia de la humanidad. El libro que nos ocupa narra justamente la historia de las ideas y las personas que protagonizaron el esfuerzo que acabaría dando como resultado el ordenador moderno.

Salvador Lucas, catedrático de lenguajes y sistemas informáticos de la Universidad Politécnica de Valencia, nos cuenta

que ese esfuerzo nació con un problema matemático planteado por David Hilbert a principios del siglo xx y con la brillante solución encontrada por un joven genio llamado Alan Turing [véase «Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas», por Gregory Chaitin; INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, julio de 2003]. El pistoletazo de salida se da en el mundo de las matemáticas, pero el trabajo de convertir esas máquinas universales en aparatos reales y tangibles se desarrolla a través de la física, las matemáticas, la lógica y la ingeniería para acabar creando una nueva disciplina: la informática.

La narrativa temporal que usa el autor, ordenada (casi) cronológicamente desde el problema que plantea Hilbert y resuelve Turing hasta hoy en día, nos lleva por toda una serie de pasos: la necesidad de programar los ordenadores con arquitectura de Von Neumann; los principios del uso del código máquina; los lenguajes de programación de alto nivel —iqué acertada la decisión de ilustrar los programas usando Fortran!— y su evolución natural desde instrumentos para programar ordenadores a constructores de mundos de acuerdo a diferentes modos de conceptualizarlos (programación lógica, funcional, orientada a objetos e imperativa). También nos conduce por los problemas asociados

a desarrollar programas correctos; por la crisis del *software* —aunque si después de sesenta años el *software* sigue en crisis, tal vez ese sea su estado natural—; por los sistemas operativos y, finalmente, por Internet y los protocolos que la hacen posible. El texto fluye de manera natural de un tema a otro y el lector se convence en todo momento de la necesidad del siguiente paso, como si todo fuera un plan trazado de antemano.

No cabe duda de que esa narrativa empuja a entender la informática como una disciplina cohesionada y coherente, aunque todavía no esté claro si se trata de una ciencia, una ingeniería, un poco de todo o incluso algo completamente nuevo. No importa: la historia de la que se ocupa el libro de Lucas merece ser contada, y es notable la cantidad de temas que quedan bien explicados en un texto de apenas 200 páginas.

El relato que aparece al principio de la obra, que tiene como protagonistas a Turing, Church, Von Neumann, el ENIAC, etcétera, ha sido contado en otras ocasiones [véase «Lo que Church y Turing ya sabían sobre mi portátil», por Salvador Lucas; INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, agosto de 2016]. Sin embargo, no es frecuente encontrar los temas tratados entre los capítulos 6 y 10. Nombres como Charles Anthony Richard Hoare, Niklaus Emil Wirth, Peter Landin, Robert Kowalski, Alan Kay o Alan Perlis no resultan muy familiares a informáticos que no sean «de carrera», por así decirlo, y no es frecuente verlos en los libros de divulgación. *La máquina que cambió el mundo* hace justicia a estos pioneros y a algunos más explicando con claridad sus aportaciones, indispensables para entender la programación tal y como se practica hoy en día.

Hay algunos apartados del texto que resultan especialmente notables. Por ejemplo, poner énfasis en que «las ideas fundamentales que subyacen a estos [los lenguajes de programación] son las que ya avanzaron los lenguajes introducidos en las décadas de los años sesenta y se-

tenta del siglo xx» (pág. 146) no solo es muy acertado: ¡es necesario! Cuando los lenguajes de programación dominantes hoy en día nos cuentan cosas como que Java tiene lambdas o que las *templates* de C++ son de lo que no hay, uno, que conoce Lisp y Smalltalk, no puede evitar sonreír con condescendencia al ver cómo la mercadotecnia que rodea al desarrollo de *software* se aprovecha de la ignorancia histórica de los mismos desarrolladores. Lisp y Smalltalk ya disponían de esos mecanismos en los años setenta, y bien implementados. Por ejemplo, las lambdas de Java ni siquiera son *closures* en condiciones, y cualquiera que conozca las macros de Lisp sabe que las *templates* de C++ no pueden competir con ellas. Disculpe el lector esta digresión técnica: tan solo quería enfatizar que el libro de Lucas puede ayudar a mitigar esta lamentable situación de ignorancia.

De igual modo, la mención al «problema del usuario final programador» (pág. 170) es otro acierto del texto. En este caso se subraya que el usuario final solo puede ser un creador, no un consumidor pasivo de *software* de terceros y dejado a merced de que otros decidan lo que puede y no puede hacer con su orde-

nador. Esta es una máquina universal, y como tal puede hacerse con ella lo que se desee. Y para ello solo es necesario saber hacerlo: es decir, saber programar. La idea de que, en un futuro, todos los usuarios deberían saber programar equivale a afirmar que todo usuario debería poder utilizar el ordenador para, como quería Douglas C. Engelbart en 1962, aumentar su intelecto.

Por último, y como esto es una reseña y no un elogio —muy a nuestro pesar—, procede mencionar algunas carencias del texto. Nada importante en realidad. En primer lugar, la historia del principio olvida todo el esfuerzo anterior al siglo xx por mecanizar los asuntos humanos: desde el *Ars magna* de Ramon Llull a finales del siglo xiii hasta los autómatas mecánicos de Jacques de Vaucanson en el siglo xix, pasando por las calculadoras de Pascal y Leibniz en el siglo xvii. Sin embargo, su ausencia se entiende si consideramos el contenido central del libro. También, cuando en la página 186 se comenta el *software* que se ejecuta en los navegadores, se mencionan Java y las *applets*, hoy prácticamente desaparecidos de los entornos web, y en cambio no se dice nada de Javascript, sin duda el

lenguaje de programación más usado en dicho ámbito. Esos párrafos merecerían una actualización. Lo que se explica sigue siendo correcto, pero el ejemplo está obsoleto. Y para terminar, el índice final contiene errores, pues los términos y los números de página (en los casos consultados) no se corresponden.

El libro de Lucas destila amor y pasión por la informática en cada uno de sus párrafos y nos transporta de la máquina de Turing a los ordenadores actuales de una manera interesante, didáctica y entretenida. Alan Kay decía en 1997 que la revolución informática todavía no había tenido lugar (afirmación que hace extensiva hasta nuestros días). Podemos decir, sin riesgo a equivocarnos, que entender la informática tal y como la esboza este maravilloso libro constituye un primer paso en esa revolución pendiente. Este recensor está convencido de que nos encontramos ante una obra inspiradora y que bien podría ser la semilla de esos futuros informáticos que Lucas, siguiendo a Alan Kay, reclama al final de su obra.

—Jordi Delgado

Universidad Politècnica de Catalunya



THRIFTY SCIENCE MAKING THE MOST OF MATERIALS IN THE HISTORY OF EXPERIMENT

Simon Werrett
The University of Chicago Press, 2019
304 págs.

Economía de medios

*Los inicios domésticos de la
experimentación científica*

En un pasillo de la facultad de biología de la Universidad de Barcelona hay una vitrina donde se expone, entre otros objetos científicos, el microscopio del profesor Ramon Margalef, pionero de la ecología marina y primer sistemático que vinculó la ecología general a los procesos termodinámicos irreversibles. Margalef, colaborador habitual de estas páginas durante años, empezó su carrera estudiando el plancton. Ca-

recía de medios económicos para comprarse un microscopio solvente, por lo que, con piezas de ferretería y del mercado de segunda mano, pulió las lentes y se construyó artesanalmente el suyo. Era principios de los años cuarenta del siglo xx, no los tiempos heroicos de Antonie van Leeuwenhoek en los albores de la Modernidad.

No obstante, tras el éxito de la física en la Segunda Guerra Mundial, desde el

radar hasta el dominio del átomo, o de la biología y la medicina en la prevención y erradicación de enfermedades, cobró fuerza la idea de que no había gran ciencia sin máquinas imponentes, fuesen aceleradores de partículas, telescopios o tomógrafos axiales. Sin rechazar la visión de una ciencia compleja y depurada en su técnica, se vuelve ahora, sin embargo, a una ciencia que, con el lenguaje al uso, llamaríamos sostenible, con la mirada puesta en lo manejable, lo pequeño, la reparación de lo estropeado, la frugalidad y el reciclaje. Se critica el despilfarro de energía de muchos laboratorios científicos, muy superior al gasto de espacios industriales equivalentes.

Muy pocos saben que esas prácticas tienen antecedentes remotos, los cuales Simon Werrett se propone desentrañar en *Thrifty science*. Los siglos xvii y xviii fueron tiempos de austeridad. Pese a la limitación de medios experimentales, los ensayos transformaron los hogares. Su investigación expande el horizonte de la historia de la ciencia, centrada todavía en la circulación de las ideas, hasta terrenos apenas hollados, como el trasiego de

objetos. Las ideas viajan incorporadas en una estructura material: libros, instrumentos y especímenes. Una vez se han utilizado o se han roto los objetos, se han desgastado los especímenes o se han llenado de polvo los libros, no se ha destruido con ello el conocimiento. Las técnicas añejas siguen empleándose mucho después de su tiempo de esplendor, lo mismo que los instrumentos o los aparatos de laboratorio.

La historia de la instrumentación científica ha tenido su propio recorrido, pasando de un estudio técnico de su origen y desarrollo a un enfoque más cultural y

social. Sin abandonar su finalidad científica, por supuesto. Se recuerda, a este respecto, *Leviathan and the air-pump*, libro de Steven Shapin y Simon Schaffer sobre la emergencia de la ciencia experimental británica a través del desarrollo de la bomba que permitía extraer aire de un recipiente de cristal, en cuyo interior se podían explorar fenómenos diversos. O la reconstrucción llevada a cabo por H. Otto Sibus del aparato diseñado por James Joule para medir el equivalente mecánico del calor. En esa línea, los historiadores de instrumentos se han centrado en microscopios, telescopios, barómetros, herbarios

o linternas mágicas; los de espacios científicos, en laboratorios, observatorios astronómicos, gabinetes de historia natural o museos. Este libro abre una nueva línea: la ciencia en casa, vale decir, en la cocina y dependencias anexas, sirviéndose de sus útiles y cacharros para conferirles un destino diferente del habitual.

Vinculados con la Real Sociedad de Londres para la Mejora del Conocimiento Natural, fundada en 1660, Robert Boyle, Robert Hooke e Isaac Newton, entre otros, forjaron un método experimental que dio origen a nuevos conocimientos, más fiables y útiles, siguiendo los pasos de Francis

NOVEDADES

Una selección de los editores de *Investigación y Ciencia*



¿QUÉ VEN LOS ASTRONAUTAS CUANDO CIERRAN LOS OJOS? HISTORIAS DE CIENCIA QUE SUPERAN LA FICCIÓN

Antonio Martínez Ron
Crítica, 2019
ISBN: 978-84-9199-139-7
376 págs. (16,90 €)



500 AÑOS DE FRÍO LA GRAN AVENTURA DEL ÁRTICO

Javier Peláez
Crítica, 2019
ISBN: 978-84-9199-138-0
320 págs. (19,90 €)

LOS SECRETOS DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS BABILONIOS A LOS ORDENADORES

Raúl Ibáñez Torres
Catarata, 2019
ISBN: 978-84-9097-826-9
160 págs. (13 €)



EL UNIVERSO IMPROBABLE ESTRELLAS FUGITIVAS, PARTÍCULAS, VACÍO, INFINITO, PORTENTOSOS AGUJEROS NEGROS Y MUCHAS OTRAS CUESTIONES CIENTÍFICAS SOBRE LA VIDA Y EL COSMOS

Rafael Bachiller
Prólogo de Juan Luis Arsuaga
La Esfera de los Libros, 2019
ISBN: 9788491646785
288 págs. (21,90 €)



FILOSOFÍA DE LA TECNOLOGÍA

Mario Bunge
Dirigido y traducido al catalán por Antoni Hernández Fernández
Publicacions Institut d'Estudis Catalans, 2019
ISBN: 978-84-9965-484-3
177 págs. (18 €)



INSTRUMENTOS DE LA CIENCIA ESPAÑOLA LOS APARATOS HISTÓRICOS DEL CSIC

Esteban Moreno Gómez
Catarata, 2019
ISBN: 978-84-9097-751-4
192 págs. (20 €)

Bacon y abriendo el camino a la Ilustración. Aquella filosofía experimental no era una búsqueda desinteresada de la verdad, sino que emergía entrelazada con una pléyade de intereses económicos y políticos, con la mirada puesta en la expansión del comercio y del poderío colonial.

Con una parquedad notable de medios se dio un impulso extraordinario al conocimiento. Newton, Watt, Priestley y Franklin lograron hitos decisivos con nuevas teorías sobre la luz y el color, la química de los gases, la naturaleza eléctrica de los rayos o la máquina de vapor. No quiere ello restar mérito a lo realizado en otros lugares, dependientes de la milicia, la Iglesia o la universidad. Ese fenómeno se explica por el deseo, motor de la ciencia en los inicios del siglo xvii, de alejar el foco del apriorismo de la filosofía para centrarlo en los experimentos, de acuerdo con el programa esbozado por Bacon en *The advancement of learning* y *Novum organum*. La nueva ciencia que postulaba debía conjugar el conocimiento práctico de la vida diaria, asistemático aunque útil, con la filosofía natural de las universidades, sistemática aunque inútil. La habilidad en el manejo de los

quehaceres domésticos constituía el punto de partida para la investigación de la naturaleza.

Otro protagonista asociado con el surgimiento de la ciencia experimental fue Samuel Hartlib, quien se dedicó a intercambiar conocimientos prácticos, naturales e históricos, así como ensayos y recetas, con un círculo de amigos, entre ellos el metalúrgico Gabriel Plattes, los terratenientes John y Mary Evelyn y el químico Boyle. La Real Sociedad contaba con miembros del círculo de Hartlib. En esa institución se creó la figura del preparador de experimentos, que los repetía ante su selecta audiencia tras haberlos ensayado en su propia casa. Se solicitaba también la formulación de hipótesis para explicar las causas determinantes de los resultados. Miembro conspicuo de esa filosofía fue Boyle, a quien debemos en buena medida la metodología empleada en los ensayos. Pese a ser sumamente rico, Boyle economizaba en medios y aconsejaba dar un nuevo uso a los utensilios caseros para los experimentos. Para que la casa fuera centro de trabajo, había que acondicionarla con espacios que sirviesen de laboratorio u observatorio. Esto supuso sacar

a los animales del interior y confinarlos en cuadras externas. Nuevos espacios que exigían nuevos muebles, con la creación de gabinetes, alacenas para medicinas y productos químicos.

Otra estancia reformada fue la bodega, tranquila y al abrigo de ruidos y distracciones, donde la temperatura era baja y se almacenaban viandas y bebidas. Ofrecía ventajas para la experimentación, con la exploración de los procesos de coagulación, refrigeración y conservación. Fue en la bodega donde Boyle realizó notables experimentos sobre fosforescencia, congelación de la cerveza y conservación de las flores. De hecho, escribió un librito en 1665 titulado *Consideración escéptica sobre el calor de las bodegas en invierno y su frío en verano*. Esa reputación de la bodega como lugar de investigación persistió a lo largo del siglo xviii. Aunque cualquier sitio, y sobre todo cualquier objeto, podía valer para la experimentación. Por botón de muestra, la teoría de la electricidad entendida como un doble fluido propuesta en 1759 se basó en el comportamiento de los calcetines de seda.

—Luis Alonso

LOS EJEMPLARES DE

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA

FORMAN VOLÚMENES DE INTERÉS PERMANENTE



Para que puedas conservar y consultar mejor la revista, ponemos a tu disposición tapas para encuadernar los ejemplares.



Disponibles las tapas del año 2019

Para efectuar tu pedido:

☎ 935 952 368

✉ contacto@investigacionyciencia.es

🌐 investigacionyciencia.es/catalogo

