JUEGOS MATEMÁTICOS

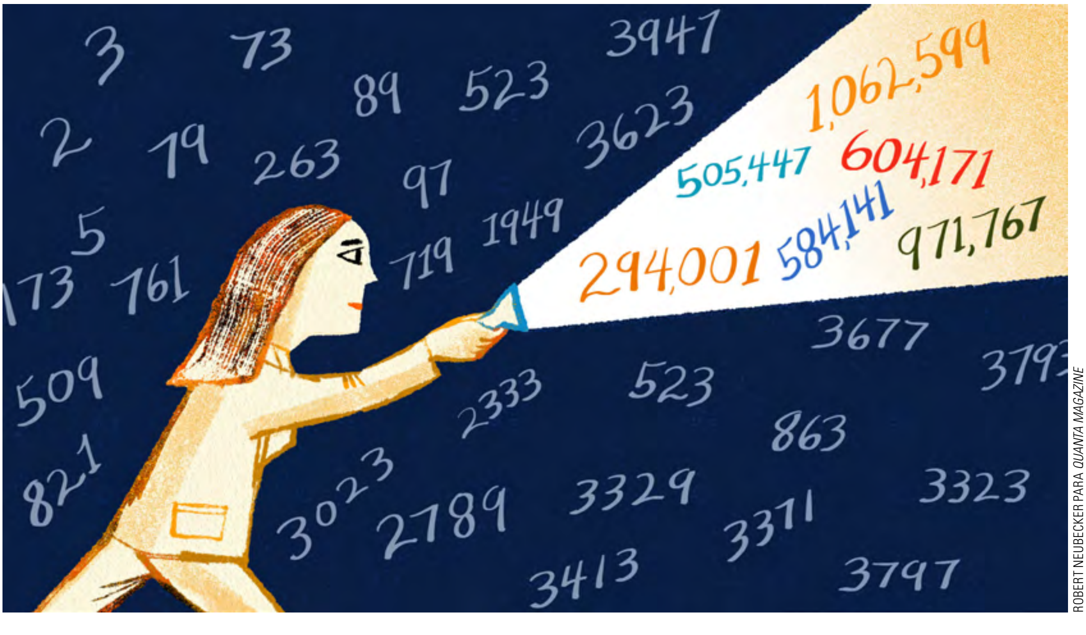
LA DELICADEZA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

La distribución de los números primos se ha estudiado durante milenios. Resultados recientes acerca de un curioso tipo de primos ofrecen una nueva visión sobre cuán diseminados están

Patrick Honner

Si siguió las noticias matemáticas a lo largo del pasado mes de julio, sabrá que el especialista en teoría de números James Maynard, de 35 años, recibió la medalla Fields, el máximo honor para un matemático. A Maynard le motivan las cuestiones que son lo bastante simples como para explicárselas a un alumno de secundaria, pero lo bastante complejas como para desconcertar a los matemáticos durante siglos. Una de esas preguntas sencillas es la siguiente: conforme avanzamos por la recta numérica, ¿debe haber siempre números primos que estén próximos entre sí?

Puede que el lector se haya percatado de que los matemáticos viven obsesionados con los números primos. ¿Qué los atrae? Quizá sea el hecho de que los números primos encarnan algunas de las estructuras y los misterios más fundamentales de las matemáticas. Los primos cimentan el universo de la multiplicación, al permitirnos clasificar y categorizar cada número natural mediante una factorización única. Sin embargo, aunque llevamos explorando los números primos desde los albores de la multiplicación, todavía no estamos seguros de dónde surgirán, cómo de diseminados se hallan o cuán cerca han de estar unos de otros.



ROBERT NEUBECKER PARA *QUANTA MAGAZINE*

Hasta donde sabemos, los números primos no obedecen a ninguna pauta simple.

Nuestra fascinación por estos objetos básicos ha llevado a la invención, o el descubrimiento, de cientos de tipos de números primos: los primos de Mersenne (que pueden expresarse de la forma $2^n - 1$, donde n es un número natural), los equilibrados (cada uno de los cuales es igual a la media aritmética de los números primos anterior y siguiente) o los de Sophie Germain (números primos p tales que $2p + 1$ también es primo), por citar algunos ejemplos.

El interés por esos conjuntos especiales de números primos creció al jugar con ellos y descubrir nuevas peculiaridades. Eso mismo ha sucedido con los números primos «delicados», una reciente adición a la lista que ha generado algunos resultados sorprendentes acerca de una cuestión de lo más elemental: ¿cómo de frecuentes o inusuales son ciertos tipos de números primos?

Para comprender mejor esta pregunta, empecemos considerando uno de los primeros aspectos intrigantes que aprende cualquier aficionado a la aritmética: hay infinitos números primos. Euclides lo demostró hace 2000 años mediante una de las pruebas por reducción al absurdo más famosas de toda la historia de las matemáticas. El sabio griego partió de la premisa de que solo existía una cantidad finita n de números primos e imaginó una lista ordenada que los contuviera a todos:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n.$$

Entonces tuvo una idea brillante: definió un número q de la forma

$$q = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1.$$

Vemos que q no pertenece a la lista original, porque es mayor que cualquiera de sus elementos. Así que, si existe un conjunto finito de números primos, ese número q no puede formar parte de él. Pero, en tal caso, tendría que poseer algún divisor aparte de sí mismo y el 1. Eso implica, a su vez, que q debería ser divisible por algún elemento de la lista; sin embargo, la forma de q asegura que, al dividirlo entre cualquiera de ellos, se obtiene siempre un resto igual a 1. Concluimos, pues, que q no es primo ni divisible por ningún primo, lo cual es un absurdo que resulta de suponer que hay una cantidad finita de números primos. Para evitar esta contradicción, deben existir infinitos primos.

Dado que hay infinitos, cabría pensar que es fácil encontrar números primos de cualquier tipo, pero una de las siguientes cosas que descubre un detective aritmético es lo diseminados que llegan a estar los números primos. Un ejercicio sencillo sobre los «espacios» que existen entre primos consecutivos arroja una conclusión harto sorprendente.

Entre los diez primeros números primos,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,$$

hay tramos que constan de uno o más números compuestos (aquellos que no son primos, como 4, 12 o 27). Podemos medir tales huecos o «lagunas» contando los números comprendidos entre dos primos consecutivos: de este modo, existe un espacio de longitud 0 entre 2 y 3; uno de longitud 1 entre 3 y 5 o entre 5 y 7; uno de longitud 3 entre 7 y 11, y así sucesivamente. El mayor salto de esta lista se produce entre 23 y 29, donde hallamos una secuencia de cinco números compuestos (24, 25, 26, 27 y 28).

Y he aquí lo asombroso: esas lagunas de números compuestos pueden ser arbitrariamente grandes, es decir, existen números primos consecutivos tan alejados entre sí como queramos. Y quizás igual de sorprendente es lo fácil que resulta demostrar esta afirmación.

Ya hemos encontrado una laguna con 5 elementos. ¿Habrá una de longitud 6? En vez de escudriñar las tablas de primos con la esperanza de dar con una, la construiremos nosotros mismos. Para ello, usaremos la función factorial, que aparece en combinatoria y en otras fórmulas básicas. Por definición,

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1.$$

Así, por ejemplo,

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6,$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Ahora, vamos a generar nuestra laguna de números compuestos. Consideremos la siguiente sucesión de números naturales consecutivos:

$$7! + 2,\ 7! + 3,\ 7! + 4,\ 7! + 5,\ 7! + 6,\ 7! + 7.$$

Dado que

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1,$$

el primero de esos números, $7! + 2$, es divisible por 2, como podemos verificar sacando factor común:

$$\begin{aligned} 7! + 2 &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 2 \\ &= 2(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 1 + 1). \end{aligned}$$

Asimismo, el segundo número, $7! + 3$, es divisible por 3, ya que

$$\begin{aligned} 7! + 3 &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 3 \\ &= 3(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 2 \times 1 + 1). \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} &7! + 4 \text{ es divisible por } 4; \\ &7! + 5 \text{ es divisible por } 5; \\ &7! + 6 \text{ es divisible por } 6; \\ &7! + 7 \text{ es divisible por } 7. \end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra sucesión es un conjunto de seis números compuestos consecutivos. Hemos obtenido así una laguna formada por al menos 6 elementos.

Es fácil generalizar esta estrategia para cualquier número natural n. La sucesión

$$n! + 2,\ \ n! + 3,\ \ n! + 4,\ \ \ldots,\ \ n! + n$$

es una secuencia de $n - 1$ números compuestos consecutivos, lo cual significa que, para cualquier n, existe una laguna de números compuestos con al menos $n - 1$ elementos. Eso demuestra que los espacios entre primos consecutivos pueden ser arbitrariamente grandes y, por consiguiente, en la lista de números naturales habrá lugares donde los primos más cercanos entre sí estén separados por 100, 1000 o incluso 1.000.000.000 de números compuestos.

Esos resultados evidencian un conflicto clásico: hay infinitos números primos, pero, al mismo tiempo, dos primos consecutivos pueden estar arbitrariamente alejados. Más aún, existen infinitas parejas de números primos consecutivos que se encuentran próximos entre sí. ¿Cómo de próximos? Hace unos diez años, el trabajo pionero de Yitang Zhang desencadenó una carrera para reducir la distancia y probar la conjetura de los primos gemelos, que postula la existencia de infinitos pares de primos que difieren en tan solo 2 unidades. Esta conjetura constituye una de las cuestiones abiertas más famosas de las matemáticas, y el propio Maynard ha hecho contribuciones importantes en pos de su demostración.

Ese conflicto también se halla presente en algunos resultados recientes sobre los primos delicados. Para hacernos una idea de qué son estos números y dónde podrían encontrarse, reflexionemos un momento sobre esta extraña pregunta: ¿existe algún número primo de dos cifras que siempre se torne compuesto al efectuar cualquier cambio en el dígito de las unidades?

Para entender el concepto de delicadeza, tomemos el número 23. Sabemos que es primo, pero ¿qué sucede si cambiamos la cifra de las unidades? Los números 20, 22, 24, 26 y 28 son pares y, por lo tanto, compuestos; 21 es divisible por 3; 25 es divisible por 5, y 27 es divisible por 9. Hasta aquí, perfecto. Sin embargo, al sustituir el dígito de las unidades por 9, obtenemos 29, que sigue siendo primo. Así que el número 23 no pertenece al tipo de primos que buscamos.

¿Qué ocurre con el 37? Como acabamos de ver, no es necesario comprobar los números pares o terminados en 5, lo que nos deja el 31, el 33 y el 39. Como el 31 también es primo, el 37 tampoco nos sirve.

¿Existe realmente algún número como el que buscamos? La respuesta es afirmativa, pero hemos de llegar al 97 para encontrarlo: 97 es primo, pero 91 (divisible por 7), 93 (divisible por 3) y 99 (también divisible por 3) son compuestos, igual que 95 y los números pares.

Un número primo es delicado si, al cambiar cualquiera de sus dígitos por cualquier otra cifra, deja de ser primo

Se dice que un número primo es delicado si, al sustituir uno de sus dígitos (el que sea) por otra cifra cualquiera, deja de ser primo. Hemos visto que el 97 es delicado con respecto al dígito de las unidades (dado que al cambiarlo siempre se obtiene un número compuesto), pero ¿satisface el criterio completo para ser un primo delicado? Enseguida vemos que no, pues si cambiamos la cifra de las decenas por un 1, obtenemos 17, que es primo (como 37, 47 y 67, que también lo son).

De hecho, no existe ningún primo delicado de dos cifras. La siguiente tabla, que recoge todos los números entre 10 y 99, y donde se han sombreado los primos, nos permite constatarlo:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Todos los números de una misma fila comparten el dígito de las decenas, y todos los números de una misma columna, el de las unidades. El hecho de que el 97 sea el único número sombreado de su fila refleja que es un primo delicado con respecto a las unidades; sin embargo, en su columna hay otros cuatro primos, y eso indica que no es delicado con respecto a las decenas.

Para ser delicado, un primo de dos cifras tendría que ser el único número sombreado de su fila y de su columna. Y, como se aprecia en la tabla, ninguno cumple esa condición. ¿Y qué sucede con los números de tres cifras? A continuación vemos una tabla similar, que muestra la disposición de los primos comprendidos entre 100 y 199, y donde se han omitido los números compuestos:

	101		103				107		109
			113						
							127		
	131						137		139
									149
	151						157		
			163				167		
			173						179
	181								
	191		193				197		199

Observamos que el 113 es el único número de su fila, lo cual indica que es delicado con respecto a las unidades. Pero no es el único de su columna, ya que algunos cambios en las decenas producen primos (como 103 o 163). Puesto que no hay ningún número que aparezca él solo en su fila y en su columna, advertimos de inmediato que ningún primo de tres cifras entre 100 y 199 nos garantiza que vayamos a obtener un número compuesto al reemplazar el dígito de las unidades o el de las decenas. En otras palabras, en dicho intervalo tampoco existe ningún primo delicado. Y ni siquiera hemos tenido que comprobar las centenas: para ser delicado, un número primo de tres cifras tendría que evitar otros primos en las tres direcciones de una tabla tridimensional.

¿Acaso no existen los primos delicados? A medida que seguimos recorriendo la recta numérica, los números primos tienden a estar más dispersos, lo cual reduce las posibilidades de que se encuentren en las filas y columnas de esas tablas multidimensionales. Sin embargo, los números grandes poseen más dígitos, y la probabilidad de que un primo sea delicado decrece con cada nueva cifra.

Pero si no nos rendimos, descubriremos que sí existen primos delicados. El más pequeño es 294.001. Al sustituir cualquiera de sus dígitos, se obtiene un número compuesto (por ejemplo, 794.001 o 284.001). Y hay más: los siguientes son

505.447, 584.141, 604.171,
971.767, 1.062.599, ...

De hecho, esta secuencia no acaba nunca: el célebre matemático Paul Erdős demostró la existencia de infinitos primos delicados. Y ese no fue más que el primero de muchos resultados sorprendentes acerca de estos curiosos números.

Por ejemplo, Erdős no solo demostró que existen infinitos primos delicados, sino también que eso es cierto en cualquier base. De modo que, si elegimos representar los números en el sistema binario, ternario o hexadecimal, seguimos teniendo asegurada la existencia de un sinfín de primos delicados.

Y no solo son infinitos: también representan un porcentaje no nulo de todos los números primos. Eso significa que el cociente entre el número de primos delicados y el número total de primos es mayor que cero. Hablando en términos matemáticos, una «proporción positiva» de todos los números primos son delicados, como demostró el medallista Fields Terence Tao en 2010. Los primos en sí mismos no constituyen una proporción positiva de todos los números, ya que su densidad disminuye a medida que avanzamos en la recta numérica. Sin embargo, entre ellos seguirán apareciendo primos delicados con suficiente frecuencia como para mantener la razón entre estos y el total de números primos por encima de cero.

Puede que el hallazgo más impactante sea un resultado de 2020, relacionado con una nueva variación de estos extraños números. Flexibilizando el concepto de dígito, los autores reimaginaron la forma en que se representan los números. La idea es pensar que un número cualquiera, como el 97, viene precedido de una infinidad de ceros:

...0000000097.

Cada cero a la izquierda se considera una cifra más, y la cuestión de la delicadeza se puede extender a estas nuevas representaciones. ¿Podría haber primos «ampliamente delicados», es decir, números primos que siempre se vuelvan compuestos al cambiar cualquiera de sus cifras, incluidos los ceros a la izquierda? Gracias al trabajo de los matemáticos Michael Filaseta y Jeremiah Southwick, sabemos que, sorprendentemente, la respuesta es afirmativa. Y no solo existen los primos ampliamente delicados, sino que también hay infinitos.

Los números primos proporcionan una serie infinita de rompecabezas con los que pueden entretenerse profesionales y aficionados. Tal vez nunca logremos desentrañar todos sus misterios, pero podemos estar seguros de que los matemáticos continuarán descubriendo, e inventando, nuevos tipos de números primos que explorar.

Patrick Honner es profesor de matemáticas y computación en un instituto de secundaria de Brooklyn, Nueva York. Reconocido divulgador, en 2013 recibió el Premio Presidencial a la Excelencia en la Enseñanza de Matemáticas y Ciencias de EE.UU.

Este artículo apareció originalmente en QuantaMagazine.org, una publicación independiente promovida por la Fundación Simons para potenciar la comprensión pública de la ciencia.

EN NUESTRO ARCHIVO

A la búsqueda de números primos. Carl Pomerance en *IyC*, febrero de 1983.
Cribas y números primos. Juan M. R. Parrondo en *IyC*, agosto de 2005.
Un nuevo patrón en los números primos. Bartolo Luque en *IyC*, julio de 2019.
La hipótesis de Riemann. Bartolo Luque en *IyC*, de diciembre de 2020 a marzo de 2021.

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA

DIRECTORA EDITORIAL
Laia Torres Casas

EDICIONES
Anna Ferran Cabeza,
Javier Grande Bardanca,
Yvonne Buchholz

EDITA

Prensa Científica, S. A.
Valencia, 307, 3.º 2.ª
08009 Barcelona
(España)
Teléfono 934 143 344
precisa@investigacionyciencia.es
www.investigacionyciencia.es

PRODUCCIÓN

InboundCycle
Plaza Francesc Macià, 8-9, 7B
08029 Barcelona (España)
Teléfono 936 116 054

PUBLICIDAD

Prensa Científica, S. A.
Teléfono 934 143 344
publicidad@investigacionyciencia.es

COLABORADORES DE ESTE NÚMERO

ASESORAMIENTO Y TRADUCCIÓN:

Javier Grande: *Apuntes*; **Andrés Martínez:** *Apuntes*, *La protección de la biodiversidad no es una causa perdida*, *Misterios del corazón y de la cabeza* (ed.) y *Así escuchan las aves su canto* (ed.); **Pedro Pacheco:** *Apuntes*, *Desinformación climática en la escuela*, *Misterios del corazón y de la cabeza* (trad.) y *Así escuchan las aves su canto* (trad.); **José Óscar Hernández Sendín:** *Apuntes*, *Vórtices marinos*, *Computación reversible* y *La delicadeza de los números primos*; **Fabio Teixidó:** *Apuntes*; **Juan Pedro Adrados:** *El increíble viaje de las Voyager*; **Sixto Castro:** *Por qué la inteligencia artificial no puede querer nada*; **J. Vilardell:** *Hacer un pleno.*

SCIENTIFIC AMERICAN

EDITOR IN CHIEF
Laura Helmuth

PRESIDENT
Kimberly Lau

EXECUTIVE VICE PRESIDENT
Michael Florek

ATENCIÓN AL CLIENTE

Teléfono 935 952 368
contacto@investigacionyciencia.es

Precios de suscripción:
1 año 75€ / 2 años 140€

La suscripción incluye el acceso completo a la hemeroteca digital (todos los números publicados desde 1976).

Ejemplares sueltos: 6,50 euros

Dep. legal: B-38.999-76
ISSN edición electrónica 2385-5665