# TEMAS 23

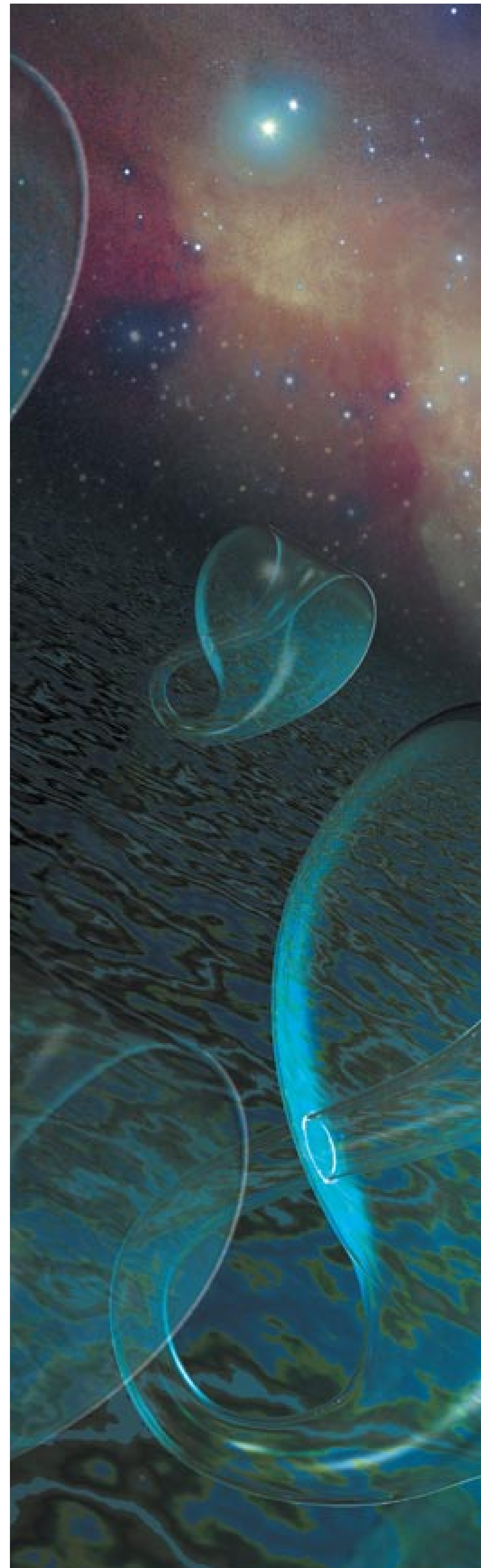
INVESTIGACION y CIENCIA
Edición española de SCIENTIFIC AMERICAN

# Ideas del infinito

1er trimestre 2001
P.V.P. 1000 PTA. 6,01 EURO

Sumario

# Ideas del infinito



# El infinito matemático

Javier de Lorenzo

*El infinito, en sus aspectos potencial y actual, aparece como una conceptualización formal reguladora de la creación matemática*

El hombre es un ser finito, limitado, habitante de una nave, la Tierra, limitada y finita. Es un ser finito que habla del infinito y juega con él, hasta el punto de que se le hace necesario para obtener conocimiento de la finitud.

El hombre estudia y maneja el infinito mediante la creación matemática, que formaliza la reiteración, la comparación, la ordenación y la clasificación, procesos básicos del quehacer matemático. La reiteración y la comparación permiten alcanzar dos conceptos distintos de infinitud.

## El infinito potencial

Si el lector da un paso y después otro y luego otro, sentirá que ese andar puede ser reiterado. En principio, siempre cabe "uno más". No hay limitación en reiterar una acción desde que la misma se hace posible. Este proceso de iteración se convierte en la intuición primaria de un infinito, el infinito potencial, de aquello que jamás tiene fin porque siempre hay un más allá.

El infinito potencial, ese ir más allá, ha quedado conceptualizado en el número natural. A cada número le sigue siempre otro y nunca hay uno último porque ese último tendría, a su vez, sucesor.

El número natural permite responder a la pregunta: ¿cuántos pasos se han dado? Dicho de otro modo, nos indica cuántos objetos hay. Contar y medir son procesos en los que se puede hablar del valor numérico asociado a las magnitudes, porque siempre se puede contar, medir, cualquier magnitud extensa, sea discreta o continua. Se puede contar la cantidad de ovejas de un rebaño, los granos de arena del desierto o la longitud de una vara. Un contar que se regula bajo un principio arquimediano:

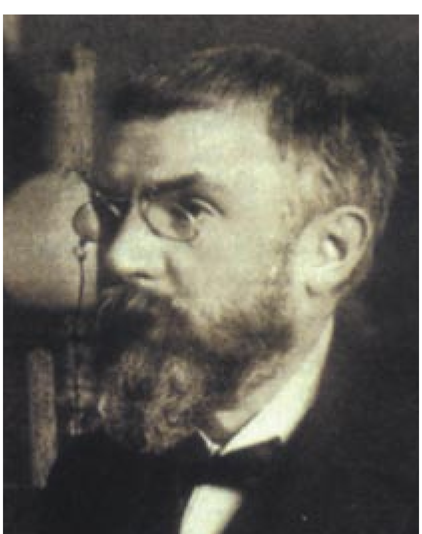
Para cualesquiera valores numéricos $x$, $y$ tales que $x<y$ se tiene un número natural $n$ tal que $nx>y$.

A cada magnitud se le asociará un número si se la compara con otra magnitud de la misma especie tomada como unidad. Al comparar dos magnitudes, al comparar sus valores numéricos asociados, se obtiene un número natural o uno racional como la octava, la quinta, etcétera. Al adoptar la división para obtener el valor numérico correspondiente en esa comparación aparece que todo número puede ser expresado en forma decimal. Así $9/10 = 0{,}9$; $1/3 = 0{,}333...$, donde los puntos sucesivos indican que ese desarrollo decimal tiene infinitas cifras, aunque en el mismo se encuentren bloques periódicos de dígitos.

Puede también aparecer un valor numérico que no sea razón o proporción entre los valores numéricos asociados a las magnitudes correspondientes, es decir, puede aparecer un número irracional. Lo mismo que el racional, el número irracional tiene infinitas cifras decimales en su desarrollo. Mas a diferencia del número racional, ese desarrollo no muestra ciclos o periodicidades; así, $\pi = 3{,}14159...$ carece de grupo alguno de dígitos que se repitan periódicamente.

Por fin, todo número real viene expresado por un desarrollo decimal con infinitas cifras. Aquí esa infinitud sí se muestra constitutiva del número real.

El infinito surge, pues, del "uno más" ligado a lo ilimitado. También emerge de la idea de aproximación a lo limitado. Tal ocurre cuando nos acercamos a una magnitud conmensurable o inconmensurable dada de antemano, es decir, cuando nos aproximamos a su valor numérico asociado que se muestra como un límite. Por ejemplo, $2/3$, $\sqrt{2}$ son números que están dados, mientras que sus desarrollos decimales, cuando no se toman en su totalidad sino en sus diez, cien, mil primeros dígitos, constituyen una aproximación a los mismos. $2/3$, $\sqrt{2}$ expresan razones de proporcionalidad: una, conmensurable y es número racional; la otra, inconmensurable, es



**LA ATRACCIÓN DEL INFINITO. Para Henri Poincaré (1854-1912, *izquierda*) la creación matemática es un quehacer sobre el infinito. Para David Hilbert (1862-1943, *derecha*) el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito.**

el número irracional que manifiesta la relación entre la diagonal del cuadrado y su lado.

En ambos casos, y de manera crucial en el segundo, aparece el infinito que se liga a la convergencia hacia un límite de distintas fracciones. Estas van desgranando valores cada vez más cercanos a dicho límite.

El infinito entendido como proceso de reiteración ligado a un límite se manifiesta también en geometría. La superficie del círculo es el límite hacia el cual convergen las superficies de los polígonos inscritos o circunscritos, conforme crece su número de lados.

Un crecer cada vez más que podría expresarse indicando que el número de lados de los polígonos inscritos o de los circunscritos tiende a $\infty$. La propia circunferencia puede identificarse, en el límite, con un polígono de infinitos lados infinitesimales.

En los últimos casos aparece el infinito no ya como proceso, sino como producto de ese proceso. Infinito designa ahora el número que completa la sucesión de los números naturales. Ese número apunta al límite de valores numéricos sucesivos de una misma variable que crecen cada vez más. Un número, $+\infty$, que completa, junto con el número $-\infty$, la recta real o del continuo. En geometría, dos rectas paralelas se cortan en el punto infinito que se agrega al plano euclídeo.

Disponemos así de elementos ideales —número infinito, puntos del plano infinitos—, que, en el caso geométrico, permiten pasar de un espacio métrico a otro proyectivo. Este tránsito obliga a admitir los principios de continuidad y de dualidad. Al agregar elementos infinitos o ideales, se da coherencia a las propiedades proyectivas. Dos puntos siempre determinan una recta en el plano euclídeo, pero dos rectas no siempre determinan un punto; no hay simetría. Al admitir que dos rectas paralelas se cortan en un punto único, un punto infinito, se acepta la simetría.

La introducción de elementos ideales explicita que la propiedad de infinitud es una propiedad métrica. En cuanto tal, el concepto de infinitud se distingue de la noción de ilimitación; podemos concebir un espacio ilimitado y finito. Sólo en un espacio métrico euclídeo la ilimitación y la infinitud se identifican. En el cálculo numérico, eso significa que el "uno más", que caracteriza al infinito potencial, se presenta como propiedad métrica, cuantitativa; por cuya razón lo ilimitado sigue aquí identificado con lo infinito potencial.

Volvamos al infinito en cuanto aproximación a un valor preestablecido. A efectos prácticos, si se mide la diagonal de un cuadrado, bastan unos cuantos decimales para quedar dentro del margen de error de los aparatos de medida empleados. Operando así no se alcanzaría jamás el número irracional, porque toda medida viene dada siempre por un número racional. Lo mismo cabe decir de los elementos ideales, del infinito potencial.

Pero el matemático va más allá. Comprende que $\sqrt{2}$ posee infinitos dígitos no periódicos en su desarrollo decimal. Afirma que $\sqrt{2}$ es un número irracional; cualquier medida que se tome siempre será inexacta. En ese ir más allá, el matemático crea unos mecanismos que aseguren la coherencia del proceso y del producto obtenido. Idea métodos de demostración que aseguran que, por ejemplo, los elementos ideales que ha introducido —el número infinito como identificado con lo ilimitado, la irracionalidad de números como $\sqrt{2}$— son coherentes.

Los matemáticos han ido forjando distintos métodos demostrativos en el ejercicio de su función: métodos enlazados con el "uno más" sin limitación, métodos enlazados de iteración y convergencia, donde aparece el método de inducción completa, métodos unidos a la imposibilidad de una conmensurabilidad y que exigen del método de demostración por reducción al absurdo (*véase el recuadro de arriba*).

Valga como ejemplo de método enlazado con el "uno más" sin limitación la demostración de que no hay un último número primo. La proposición 20 del libro IX de los *Elementos* de Euclides establece que "hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos".

En el argumento de Euclides se construye un número primo que no estaba entre los primos dados y cabe agregarlo a los mismos. Resultaría otra multitud de números primos, a la que podría reiterarse el proceso demostrativo; merced a esa posibilidad, el enunciado se traduce sin problemas desde su formulación originaria a la que hoy se considera clásica, "el número de números primos es infinito". Una traducción que, sin embargo, identifica ilimitación con infinitud actual, lo que quizá sea una traición a lo expuesto en Euclides.

### Reducción al absurdo

El método por reducción al absurdo aparece ligado a la demostración de la inconmensurabilidad de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... Platón, en *Teeteto*, afirma que Teeteto ha demostrado la inconmensurabilidad de esos primeros números hasta llegar a $\sqrt{17}$. No indica cómo lo ha hecho ni por qué se detiene en $\sqrt{17}$.

Aristóteles, en *Metafísica*, da la demostración de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ hoy clásica:

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, expresable como razón de dos naturales, $a$, $b$, y de tal manera que $a$ y $b$ sean primos entre sí. Se tiene $\sqrt{2} = a/b$. Suprimiendo denominadores, $a = b\sqrt{2}$. Elevando al cuadrado, $a^2 = 2b^2$, lo cual indica que $a^2$ es par y, por consiguiente, $a$ también, es decir, $a = 2p$. De aquí, $2b^2 = (2p)^2 = 4p^2$ y, por tanto, $b^2 = 2p^2$, de donde $b$ también es par. Lo que se ha obtenido es que $a$ y $b$ son ambos pares, luego no pueden ser primos entre sí, contra la hipótesis. Por consiguiente, afirmar que $\sqrt{2}$ es racional conduce a una contradicción y ha de resultar falso.

Hay que observar que los principios de bivalencia, de no-contradicción y de tercero excluido participan de modo implícito en este tipo de demostración.

## La sinfonía del infinito

Pero es en el dominio del análisis infinitesimal donde el infinito potencial alcanza su esplendor. Con palabras de Hilbert en su ensayo *Acerca del infinito*: "En cierto sentido, el análisis matemático no es sino una sinfonía del infinito."

El análisis infinitesimal nace en un entorno geométrico, ligado al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, que están determinados por una curva, el grafo de la función. Desde una perspectiva cinemática esa curva es la trayectoria de un punto que, en su movimiento, depende de la variable temporal. El estudio del comportamiento de esa función, que representa la trayectoria de un cuerpo en movimiento, va a realizarse en el intervalo infinitesimal de un punto.

El análisis infinitesimal muestra su potencia para abordar el comportamiento de cualquier fenómeno físico. Se plantea la ecuación diferencial que

## Inducción completa

Un ejemplo clásico que nos llevará a entender el método de la inducción completa nos lo ofrece la llamada desigualdad de Bernoulli:

$$(1 + x)^n > 1 + nx \quad \text{para } n \geq 2.$$

La demostración por inducción completa se escinde en las tres etapas siguientes:

**1.** Se comprueba que la desigualdad se cumple para el primer número natural, que, por las condiciones dadas, ha de ser $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

**2.** Aceptada la hipótesis de recurrencia —en este caso, la desigualdad para un $n = k$ cualquiera— se demuestra que se verifica para el sucesor de $k$:

$$(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k (1 + x) >$$
$$> (1 + kx)(1 + x) = 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (1 + k)x + kx^2 > 1 + (1 + k)x$$

Se ha comprobado que, si se cumple para $k$, entonces se cumple para $k+1$.

**3.** (Cláusula de cierre.) Como $k$ es cualquier número natural, la proposición se aplica a todos los naturales.

Conviene distinguir entre inducción simple y completa. En aquélla no hay cláusula de cierre y sólo es válida para los casos encontrados. Pero al ir uno más allá pudiera fallar. No haber encontrado un contraejemplo no significa que no exista; es el clásico problema de la inducción desde Hume. El cierre en la inducción completa indica que esta posibilidad no existe: se hace la afirmación para el total de los números naturales. Lo que exige, evidentemente, que dicho total esté dado en acto.

traduce el comportamiento del fenómeno y se pasa a integrar dicha ecuación diferencial en el intervalo asociado correspondiente. En ese estudio aparecen los conceptos clave del análisis infinitesimal (derivada, diferencial, integral, continuidad, etc.), que van a exigir las nociones de límite y de aproximación ilimitada, es decir, el infinito potencial.

La idea de continuidad —ejemplificada en el trazo que deja un lápiz sobre el papel sin levantarlo o en la trayectoria que sigue un móvil en su recorrido— quedará formulada del siguiente modo por A. L. Cauchy en su *Curso de análisis*: "La función $f(x)$ permanecerá continua respecto de $x$ entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función." Es decir, para un incremento $h$ infinitamente pequeño dado a $x$, el valor $f(x+h) - f(x)$ decrece indefinidamente con el valor de $h$.

En términos de límites, y admitiendo que la función $f$ esté definida para todos los elementos $x$ de un segmento cerrado $[a, b]$, si para $x_0 \in [a, b]$, se tiene que

$$\text{lím}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

la función $f$ se dirá continua en $x_0$. Expresión que, puesta en forma quizá más sugerente, quedaría como

$$\text{lím}_{x \to x_0} f(x) = f(\text{lím}_{x \to x_0} x).$$

Cauchy había establecido con anterioridad que "una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente convergiendo hacia el límite cero". En este lenguaje dinámico las cantidades son magnitudes extensas que aumentan o disminuyen; sus valores numéricos asociados convergen a $\infty$ o a 0, respectivamente.

En un lenguaje estático, donde lo que ya se tiene dado en acto son los puntos del intervalo, las expresiones de Cauchy carecen de sentido y pueden ser eliminadas en beneficio de conceptos de carácter más aritmético como los de mayorar, minorar, aproximar. En este caso la formulación para la continuidad de una función en un punto $x_0$ quedaría en los siguientes términos: La función $f$ es continua en $x_0$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - x_0| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En esta reformulación se ha producido una transformación conceptual. Los intervalos dejan de considerarse magnitudes extensas, que disminuyen o aumentan, para tomarse como conjuntos de puntos dados en acto. Los intervalos podrán hacerse mayores o menores en cuanto a su cardinalidad, pero no aumentar o diminuir dinámicamente y, por supuesto, sus elementos no varían. Al estar dados en acto, se acepta el infinito en acto y no en proceso. Se ha pasado de un infinito potencial a uno actual, de manera paralela al caso euclídeo.

El interés de la función no acaba ahí. La noción de función derivada de una función $f$ en un punto $x_0$ es

$$f'(x) = \text{lím}_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

siempre que el límite exista. La función es diferenciable en un punto si posee derivada en ese punto. Si la función $f$ es diferenciable en un punto, por definición también es continua en él. Pero no se cumple la recíproca. La gráfica asociada a la función $f$ posee tangente en el punto dado y el valor que toma la derivada en dicho punto es la pendiente de dicha tangente. Por lo cual el comportamiento de la función —si es creciente o decreciente, si posee un máximo o un punto de inflexión— puede estudiarse atendiendo a las sucesivas derivadas de la función en un punto de la misma (*véase el recuadro de la página siguiente*).

El concepto de comportamiento de una función puede trasladarse al comportamiento de una sucesión, $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$, siempre que se trate de una función cuya variable recorra la sucesión de los números naturales, es decir, la infinitud de los mismos. De ahí podemos pasar al concepto de serie infinita, constituida por las sucesivas sumas parciales o por los primeros $n$ términos de la sucesión.

Las funciones continuas clásicas muestran una regularidad característica. Indefinidamente derivables, poseen una tangente en cada punto. Pero caben funciones continuas que no admitan derivada en ninguno de sus puntos (ni grafo geométrico consiguiente) o que llenen todo un cuadrado, como la curva construida por Peano en 1890. Para abordar estas