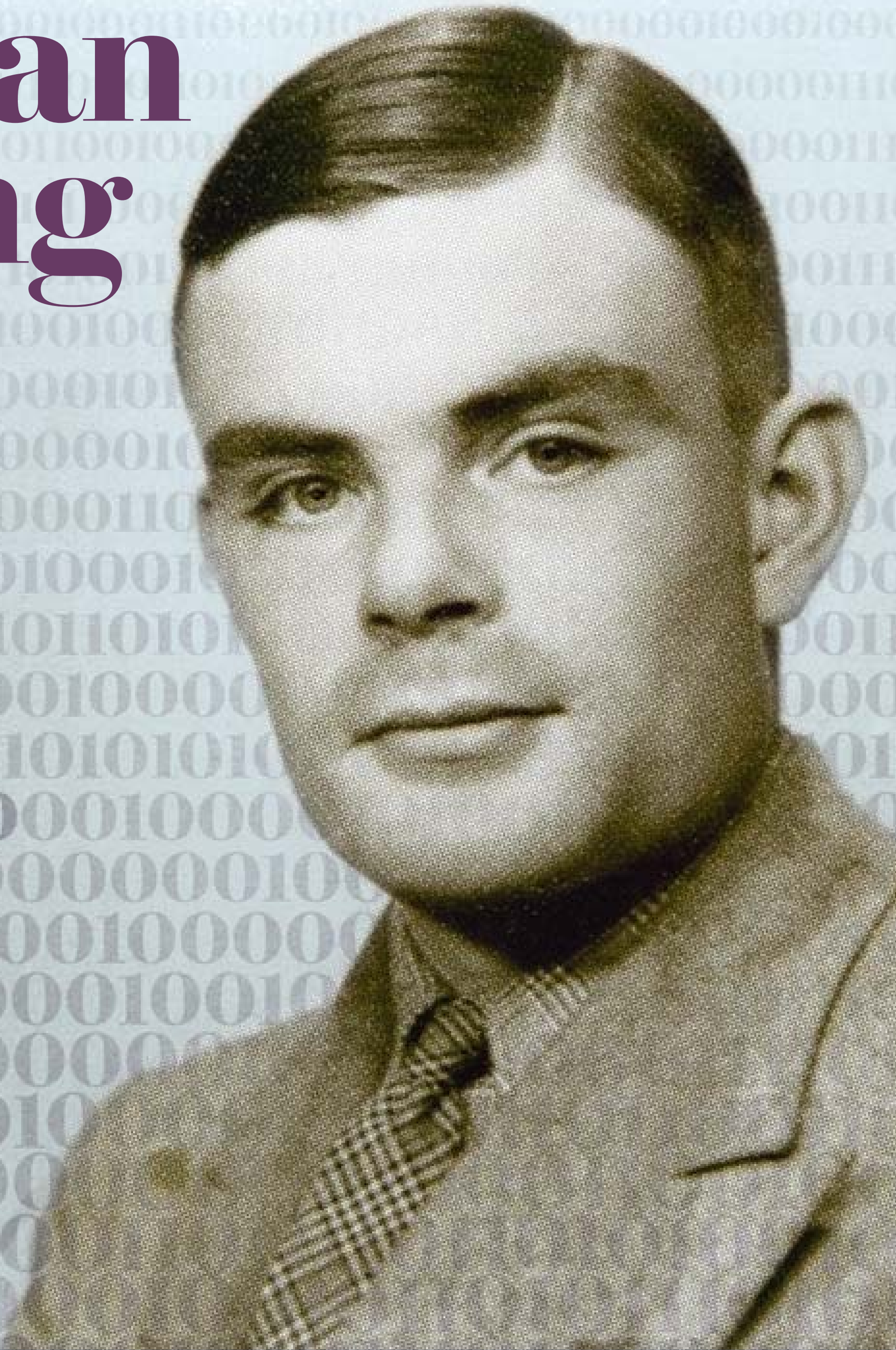
TEMAS 68

INVESTIGACIÓN Y CIENCIA
Edición española de SCIENTIFIC AMERICAN

La ciencia después de Alan Turing



InvestigacionyCiencia.es
6,50 EUROS
2º TRIMESTRE 2012
00068
9 778411 355668

TEMAS 68

2º trimestre 2012

La ciencia después de Alan Turing

LA NOCIÓN DE COMPUTABILIDAD

BIOLOGÍA E INFORMACIÓN

INTELIGENCIA ARTIFICIAL

La noción de computabilidad

Artículo publicado en
Investigación y Ciencia
n.º 322

LA NOCIÓN DE COMPUTABILIDAD

Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas

Grandes pensadores del siglo XX han demostrado que la incompletitud y la aleatoriedad medran incluso en el mundo austero de la matemática

Gregory J. Chaitin

Todos saben que los ordenadores son aparatos muy prácticos. Tanto, que se han vuelto indispensables en el funcionamiento de una sociedad moderna. Pero hasta los informáticos han olvidado —exagero, pero solo un poco— que fueron inventados para que ayudasen a aclarar una cuestión filosófica concerniente a los fundamentos de la matemática. ¿Sorprendente? Sí, en verdad.

Comienza esta asombrosa historia con David Hilbert, un célebre matemático alemán que a principios del siglo XX propuso la formalización completa de todo el razonamiento matemático. Pero resultó que era imposible formalizar el razonamiento matemático, por lo que, en cierto sentido, su idea fue un tremendo fracaso. Mas, en otro sentido, tuvo un gran éxito, porque el formalismo ha sido uno de los grandes dones que nos ha regalado el siglo XX. No para el razonamiento o la deducción matemática, sino para la programación, para el cálculo, para la computación. Una pieza olvidada de la historia intelectual.

Me propongo referir aquí esa historia sin detenerme en los detalles de índole matemática. Será, pues, imposible explicar plenamente la obra de quienes hicieron las aportaciones fundamentales, entre ellos, Bertrand Russell, Kurt Gödel y Alan Turing. Aun así, el lector paciente debería poder captar la esencia de sus argumentos y comprender en qué se inspiraron algunas de mis propias ideas sobre la aleatoriedad inherente a la matemática.

EN SÍNTESIS

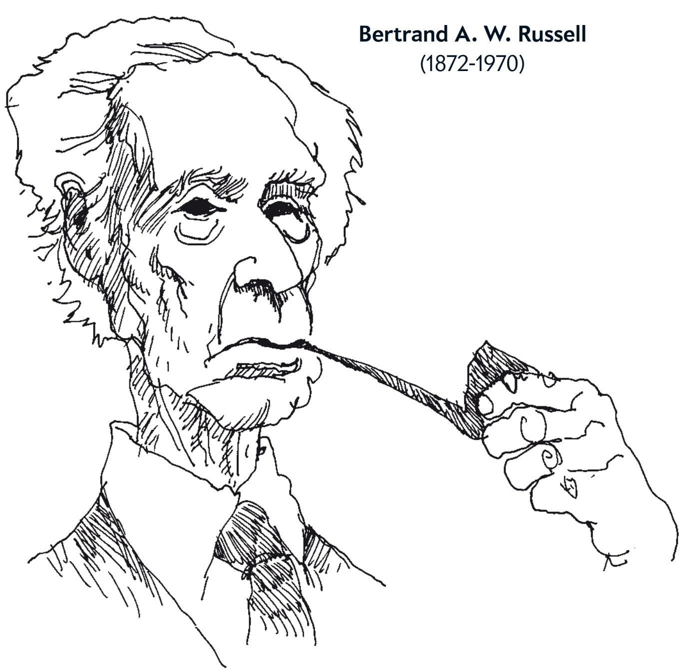
A principios del siglo XX, David Hilbert formuló el «problema de la decisión»: ¿es posible determinar, en un número finito de pasos, la veracidad o falsedad de cualquier enunciado lógico?

En 1931, Kurt Gödel demostró que el proyecto de Hilbert era irrealizable: ningún sistema axiomático coherente es capaz de probar o refutar todos los enunciados posibles de la aritmética.

La misma pregunta llevó a Alan Turing a considerar y definir la noción moderna de computabilidad. Sus resultados impusieron límites a la capacidad de cálculo y razonamiento matemáticos.

La noción de computabilidad ha permitido relacionar los conceptos matemáticos de aleatoriedad y complejidad algorítmica con los de probabilidad y entropía en las teorías físicas.

Manos que dibujan, obra creada por M. C. Escher en 1948, proporciona una analogía visual de la «paradoja de Russell», así llamada en recuerdo del matemático británico Bertrand Russell. Planteó a sus coetáneos de principios del siglo XX este problema lógico, que más tarde inspiraría los trabajos de Kurt Gödel, de Alan Turing y del autor sobre los límites de las matemáticas. Una de las formas que toma la paradoja de Russell es el par de enunciados: «La oración siguiente es falsa. La oración anterior es verdadera». Cada aserto, por separado, parece razonable (es decir, puede ser verdadero o falso); en cambio, no es posible evaluar su verdad o falsedad al tomarlos conjuntamente. Es su combinación la que origina la paradoja, lo mismo que las dos manos del dibujo de Escher.



Bertrand A. W. Russell
(1872-1970)

LAS PARADOJAS LÓGICAS DE RUSSELL

Voy a empezar con Bertrand Russell, matemático que al pasar el tiempo se tornaría filósofo, primero, y por último, humanista. Russell constituye una figura clave porque descubrió algunas paradojas muy perturbadoras en la lógica misma. Es decir, halló casos en los que razonamientos en apariencia impecables conducen a contradicciones. Las aportaciones de Russell fueron fundamentales para que se difundiese la idea de que estas contradicciones causaban una crisis grave y habían de ser resueltas de algún modo.

Las paradojas que Russell descubrió atrajeron mucho la atención en los círculos matemáticos, pero, curiosamente, tan solo una de ellas acabó llevando su nombre. Consideremos el conjunto de todos los conjuntos que no son un elemento de sí mismos. Preguntemos entonces: ¿es este conjunto elemento de sí mismo? Si fuera elemento de sí mismo, no lo sería, y viceversa.

El conjunto de todos los conjuntos mencionados en la paradoja de Russell encuentra un símil en el barbero de un pueblo pequeño y apartado: el barbero rasura a todos los hombres que no se afeitan ellos mismos. Tal descripción parece francamente razonable hasta que se pregunta: ¿se afeita el barbero a sí mismo? Se afeita a sí mismo si, y solamente si, no se afeita a sí mismo. Desde luego, se podría decir: «¿Y a quién le importa ese hipotético barbero? ¡Todo eso no es más que un absurdo juego de palabras!». Pero cuando lo que se está dilucidando es el concepto matemático de conjunto, no resulta tan fácil dejar de lado un problema lógico.

La paradoja de Russell es un eco, en la teoría de conjuntos, de otra paradoja muy anterior, ya conocida por los antiguos griegos. A menudo se la llama paradoja de Epiménides, o paradoja del mentiroso. Se dice que Epiménides exclamó: «¡Esta aseveración es falsa!». ¿Lo es? Si su aseveración es falsa, ha de ser verdadera. Pero, si es verdadera, es falsa. Así que, cualquiera que sea la hipótesis sobre su veracidad, estamos en conflicto. Otra versión de la paradoja, en dos enunciados, reza: «El enunciado siguiente es verdadero. El enunciado precedente es falso». Cada enunciado, individualmente, parece estar claro, pero combinados crean un sinsentido. Es posible desdeñar tales paradojas, considerándolas juegos de palabras sin significado, pero algunas de las más grandes inteligencias del siglo xx se las tomaron muy en serio.

Una de las reacciones a la crisis de la lógica fue la tentativa de Hilbert, que trató de eludirla por medio del formalismo. Si encontramos conflictos al seguir razonamientos que parecen correctos, la solución consiste en utilizar la lógica simbólica para crear un lenguaje artificial y ser muy cuidadosos al especificar sus reglas, de modo que no surjan contradicciones. Después de todo, el lenguaje cotidiano es ambiguo: no siempre se sabe de cierto cuál es el antecedente de un pronombre.

EL PLAN DE RESCATE DE HILBERT

La idea de Hilbert consistía en crear para el razonamiento, para la deducción y para la matemática un lenguaje artificial perfecto. Hizo, por tanto, hincapié en la importancia del método axiomático, donde se parte de un conjunto de postulados básicos (axiomas) y reglas bien definidas para efectuar deducciones y derivar teoremas válidos. La idea de trabajar matemáticamente de este modo se remonta a los antiguos griegos, y en particular, a Euclides y su geometría, un sistema de hermosa claridad matemática.

Dicho de otro modo, era intención de Hilbert ser absolutamente riguroso en lo que se refería a las reglas del juego —las definiciones, los conceptos elementales, la gramática y el lenguaje—, de modo que hubiera un acuerdo general sobre la forma en que se había de hacer la matemática. En la práctica resultaría excesivamente laborioso utilizar un sistema axiomático tal para desarrollar nuevos resultados o teorías matemáticas, pero su importancia desde el punto de vista filosófico sería grande.

La propuesta de Hilbert no parecía demasiado espinosa. Después de todo, no hacía sino seguir las tradiciones de formalización de la matemática; bebía de una larga historia de trabajos de Leibniz, Boole, Frege y Peano. Pero lo que él deseaba era recorrer el camino completo, hasta el mismísimo fin, y formalizar la *totalidad* de la matemática. La gran sorpresa fue que tal cosa no resultase posible. Hilbert estaba equivocado, aunque su error fue tremendamente fructífero porque había planteado una pregunta muy acertada. Al formularla creó una disciplina del todo nueva, la *metamatemática*, un campo introspectivo de la matemática en el que se estudia lo que la matemática puede o no puede conseguir.

La noción fundamental es la siguiente: en cuanto se entierra la matemática en un lenguaje artificial *à la* Hilbert, en cuanto se establece un sistema axiomático completamente formal, podemos olvidarnos de que posee algún significado y limitarnos a considerarla un juego; sus piezas serían marcas trazadas en un papel, y consistiría en deducir teoremas de los axiomas. Claro está, si se hace matemática es porque tiene significado. Pero si se desea estudiar la matemática utilizando métodos matemáticos, es necesario destilar el significado y limitarnos a examinar un lenguaje artificial con reglas absolutamente precisas.

¿Qué clase de cuestiones podríamos plantear? Por ejemplo, si se puede demostrar que 0=1. (Podemos esperar que no.) A decir verdad, dada una proposición cualquiera, llamémosla A, podemos preguntarnos si es posible demostrar, o bien A, o bien la contraria de A. Se considera que un sistema axiomático formal es completo si se puede demostrar, bien que A es verdadera, bien que A es falsa.