por Gabriel Uzquiano

Gabriel Uzquiano es profesor de filosofía en la Universidad de California del Sur.

El problema de la inducción de Hume

¿Es posible predecir el futuro? Una consecuencia sorprendente del axioma de elección

Todos razonamos sobre el futuro a partir de nuestras observaciones sobre el pasado. Cuando subimos a un avión, confiamos en que el aparato se elevará porque, en el pasado, una gran cantidad de aeronaves casi idénticas lo han hecho sin problemas en circunstancias muy similares. Cuando preparamos una taza de café, creemos que nos provocará la misma sensación placentera que en ocasiones anteriores. Todos estamos seguros de que mañana saldrá el sol. Nuestras expectativas acerca del futuro se basan en el método inductivo, según el cual tendemos a proyectar sobre el porvenir las regularidades que hemos observado en el pasado.

En el siglo XVIII, David Hume propuso un célebre argumento contra el método inductivo. Este partía de la siguiente pregunta: ¿cómo justificar la expectativa de que el método inductivo continuará generando predicciones mayoritariamente correctas en el futuro? Para demostrarlo cabrían dos posibilidades: a partir de un argumento deductivo, o bien mediante un razonamiento basado en nuestra experiencia previa con el método.

Pero parece claro que ningún argumento lógico o matemático podrá justificar el método inductivo: el mundo podría convertirse mañana en un lugar completamente caótico sin que ello contraviniese ningún principio lógico o matemático. Por tanto, si no podemos justificar el uso del método inductivo por medio de un argumento deductivo, tal vez podamos recurrir a nuestra experiencia con el método. Al fin y al cabo, el razonamiento inductivo nos ha brindado grandes servicios en el pasado. Nuestra experiencia confirma una y otra vez que el método genera predicciones certeras en la gran mayoría de los casos: el café casi siempre nos reconforta y el sol sale todas las mañanas. Por tanto, parece más que razonable concluir que continuará generando predicciones mayoritariamente correctas en el futuro.

Pero Hume no se hubiese dejado impresionar lo más mínimo por el razonamiento anterior. Después de todo, no hemos hecho sino emplear el método inductivo para justificar el propio método. Podemos ilustrar el inconveniente con un ejemplo. Supongamos que existe una comunidad de individuos que, a la hora de razonar sobre el futuro, utilizan el método *contrainductivo*: si observan una determinada regularidad en el mundo, predicen que dicha pauta se esfumará en el futuro. (Esta manera de razonar no se diferencia demasiado de la que emplea un jugador empedernido que se halla convencido de que comenzará a ganar muy pronto porque ya lleva muchísimo tiempo perdiendo todo el dinero que apuesta.)

La vida en la comunidad contrainductivista se halla plagada de dificultades. La manera de razonar de sus miembros les lleva a tomar decisiones descabelladas. Dado que nadie ha sobrevivido tras lanzarse por un barranco, están convencidos de que sobrevivirán cuando lo intenten. Pero, por disparatado que parezca el método contrainductivo, siempre podríamos justificarlo si —como en el caso anterior— para ello se nos permitiese recurrir al propio método: dado que la mayoría de las predicciones generadas por el método contrainductivo han sido erróneas, razonan los miembros de la comunidad, a partir de ahora el método generará predicciones mayoritariamente correctas.

El problema de la inducción de Hume sugiere la siguiente pregunta: ¿existe alguna estrategia para predecir el futuro que nos permita justificar la expectativa de que sus predicciones se cumplirán la mayoría de las veces? Hume creía que el método inductivo no satisfacía dicho requisito. Y, en líneas generales, dudaba que existiese un método tal.

¿Cara o cruz?

A pesar del pesimismo de Hume, uno de los axiomas de la teoría de conjuntos, el *axioma de elección*, parece implicar que, al menos en ciertas circunstancias idealizadas, sí resulta posible predecir el futuro. A continuación examinaremos dos ejemplos. El primero consiste en un juego en el que habremos de realizar un número infinito de predicciones en el intervalo de una hora. (Este caso posee una estructura parecida al que Agustín Rayo planteaba en «Sombreros infinitos» [INVESTIGACIÓN Y CIENCIA, febrero de 2009]. Sin embargo, aquí analizaremos una solución alternativa que nos permitirá efectuar una generalización sorprendente.)

Imagine que, a partir de las 12:00 del mediodía, lanzamos una moneda al aire cada $1/n$ de hora, para cada número natural n. Los lanzamientos (idealizados y de duración cero cada uno) se realizarán de tal manera que el último de ellos tenga lugar a las 13:00 (correspondiente a $n = 1$); el penúltimo, a las 12:30 ($n = 2$); el antepenúltimo, a las 12:15 ($n = 3$), etcétera. Observe que, de esta manera, a cada ronda precede un número infinito de ellas.

Justo antes de cada lanzamiento, nuestro objetivo consiste en predecir si obtendremos una cara o una cruz. Podemos suponer que la probabilidad de obtener un resultado u otro es completamente independiente de lo que haya ocurrido en los lanzamientos anteriores. Además, sabemos que la probabilidad de obtener una

DANIEL UZQUIANO

cara o una cruz es siempre igual a 1/2. ¿Existirá algún método que nos permita predecir de manera fiable el resultado de la mayoría de los lanzamientos?

Desde luego, la tarea parece imposible. Es cierto que, cuando nos toque predecir el resultado del lanzamiento de las 12:15, dispondremos de la lista infinita de todos los resultados obtenidos hasta entonces. Pero dado que la probabilidad de obtener una cara o una cruz no depende de las rondas anteriores, no parece que estas puedan ayudarnos a predecir qué ocurrirá a las 12:15.

Por increíble que parezca, existe una estrategia que garantiza que, a lo sumo, nuestras predicciones fallarán en un número *finito* de ocasiones. Para describirla, lo primero que debemos hacer es dar una caracterización matemática a la secuencia de lanzamientos: cada vez que la moneda caiga cara, codificaremos el resultado con un 0; cuando caiga cruz, con un 1. De esta manera, una secuencia de lanzamientos queda representada por una sucesión infinita de ceros y unos, en la que el término n-ésimo se corresponde con el resultado del lanzamiento que tuvo lugar un $1/n$ de hora después de las 12:00. Así, una sucesión como la siguiente:

$$\langle 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots \rangle$$

codificaría una secuencia de lanzamientos que concluyó con una cara a las 13:00, una cruz a las 12:30, otra cruz a las 12:15, tres caras en los lanzamientos anteriores, cuatro cruces en los precedentes, etcétera.

El conjunto de todas las sucesiones infinitas de ceros y unos se corresponde con la familia de todos los resultados que podemos obtener tras haber efectuado todos los lanzamientos. Ahora bien, el axioma de elección de la teoría de conjuntos garantiza que siempre es posible *ordenar bien* cualquier conjunto. En general, que exista un *buen orden* en un conjunto quiere decir que hay una manera de ordenar sus elementos de modo que, dado cualquier subconjunto suyo, siempre existirá en él un primer elemento.

Es importante señalar que no toda manera de ordenar un conjunto da lugar a un buen orden. Sin ir más lejos, el orden canónico de los números reales no constituye una relación de buen orden en los reales. Para verlo, basta con tomar un intervalo abierto como (0, 1) (todo número real estrictamente mayor que 0 y estrictamente menor que 1): dado cualquier número real en dicho intervalo, siempre será posible encontrar un número menor que él de acuerdo con el orden canónico. Por tanto, no podemos decir que exista un «primer elemento» en (0, 1) de acuerdo con el orden canónico.

Ahora bien, del axioma de elección se sigue que existe un buen orden de los reales, según el cual, dado cualquier subconjunto de números reales siempre existirá en él un número menor que todos los demás. Eso sí, el axioma no nos dice cómo ordenar bien los números reales; tan solo nos dice que es posible hacerlo.

Del mismo modo, y aunque en principio ignoremos cómo construirla, sabemos que existe una manera de ordenar bien el conjunto formado por todas las sucesiones infinitas de ceros y unos. Denotemos cada una de esas sucesiones mediante el símbolo S_k (donde k es un número natural) y —suponiendo que podamos fijarla— llamemos $\prec$ a la relación de buen orden en dicho conjunto. En particular, dado que $\prec$ es un buen orden del conjunto formado por todas las S_k, sabemos que no puede existir una cadena infinita descendente como la que sigue:

$$\cdots \prec S_3 \prec S_2 \prec S_1,$$

puesto que entonces no habría ningún primer elemento.

Ahora ya podemos diseñar una estrategia que nos permita predecir con acierto la mayoría de los lanzamientos de moneda.

Para ello, antes de las 12:00 escogeremos un buen orden $\prec$ en el conjunto de sucesiones de ceros y unos. Cuando llegue el momento de predecir el resultado del lanzamiento que tiene lugar un $1/n$ de hora después de las 12:00, procederemos en tres pasos. Primero, nos fijaremos en todas las sucesiones de ceros y unos que resulten compatibles con los resultados que hemos obtenido hasta entonces (es decir, en aquellas cuyos términos posteriores al n-ésimo se corresponden con las caras y las cruces obtenidas en los lanzamientos de moneda anteriores). Segundo, de entre todas esas sucesiones, seleccionaremos la *menor* de ellas de acuerdo con el buen orden prefijado, $\prec$. Por último, predeciremos el resultado del lanzamiento de moneda de acuerdo con la regla siguiente: si en el n-ésimo término de la sucesión seleccionada es un 0, pronosticaremos una cara; si es un 1, vaticinaremos que la moneda caerá cruz. Si procedemos de esta manera para cada lanzamiento después de las 12:00, nos habremos equivocado, a lo sumo, un número finito de veces.

¿Cómo es posible? Podemos demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos en primer lugar que nos hemos equivocado en las predicciones correspondientes a los lanzamientos efectuados un $1/p$ y un $1/q$ de hora después de las 12:00, donde p es un número natural menor que q (lo que implica que el lanzamiento asociado a q tuvo lugar antes que el asociado a p). Denotemos por S_p y S_q las sucesiones que empleamos en cada momento para realizar cada predicción incorrecta. En tal caso, sabemos que $S_p \neq S_q$, ya que, por definición, S_p incluye el valor correcto del lanzamiento de la moneda en el lugar q-ésimo de la sucesión, mientras que S_q no, pues su predicción falló. Pero, además, sabemos que:

$$S_q \prec S_p,$$

pues, de otro modo, el método no habría recomendado usar S_q a la hora de predecir el valor obtenido un $1/q$ de hora después de las 12:00.

Se sigue de lo anterior que no podemos haber errado un número infinito de veces. ¿Por qué? Porque si la estrategia hubiese generado un valor equivocado para un conjunto infinito de lanzamientos correspondientes a las posiciones k_1, k_2, k_3, ..., aplicando repetidamente el mismo razonamiento anterior podríamos demostrar que:

$$\cdots \prec S_{k_3} \prec S_{k_2} \prec S_{k_1}.$$

Ello implicaría que existe una cadena infinita descendente de sucesiones de ceros y unos con respecto al orden prefijado. Pero semejante conclusión contradice el supuesto de que $\prec$ es un buen orden del conjunto de sucesiones, por lo que podemos concluir que el método jamás producirá un número infinito de predicciones.

Historias y mundos

Existen más estrategias que garantizan el resultado anterior. Sin embargo, el método descrito permite una curiosa generalización. Pensemos en una *historia* como en una función que asigna a cada instante de tiempo un estado del mundo. Es decir, una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, donde cada instante queda representado por un número real, y cada estado posible del mundo, por otro número real.

Una de esas funciones, que podemos llamar H_R, codifica la historia del mundo *real*, aquel en el que vivimos. El resto de las funciones describen otras historias, correspondientes a otros mundos posibles. Una formulación idealizada del problema de la inducción vendría a ser la siguiente: ¿existe alguna estrategia que nos permita predecir acertadamente el valor de $H_R(t)$ para la mayoría de los instantes de tiempo t? Curiosamente, también aquí el axioma de elección asegura la existencia de una estrategia tal. Esta se obtiene generalizando el método del problema anterior.

Supongamos que conocemos los valores que la función H_R asocia a cada instante previo a t. Conocidos esos datos, nuestro objetivo consiste en predecir qué ocurrirá en t. Para ello, en primer lugar fijaremos un buen orden $\prec$ en el conjunto de todas las historias posibles (al igual que antes, la existencia de ese buen orden queda garantizada por el axioma de elección). De entre todas ellas, escogeremos las que resultan compatibles con los valores de H_R anteriores a t. Por último, seleccionaremos la menor de ellas de acuerdo con la relación de buen orden que habíamos fijado.

Ya contamos con todo lo que necesitamos: ahora, podemos predecir que el estado del mundo en el instante t coincidirá con el valor que la función seleccionada asocia a t. Al igual que antes, nada nos garantiza que no vayamos a cometer errores. Sin embargo, resulta posible demostrar que, en un sentido muy preciso, la *mayoría* de nuestras predicciones serán acertadas.

Como antes, la clave consiste en establecer una conexión entre el orden de los instantes en los que el método erró y las historias empleadas para predecir el estado del mundo en cada uno de ellos. En primer lugar, notemos que si t y t' denotan dos instantes en los que el método se equivocó (donde $t' > t$ de acuerdo con el orden canónico de los reales) y h y h' son las historias que empleamos para realizar las correspondientes predicciones, entonces sabemos que $h \prec h'$.

Ahora consideremos el conjunto formado por todos los instantes en los que nos hemos equivocado (E) y el de las historias que hemos utilizado para efectuar cada una de las predicciones erróneas (H^*). A partir de la observación del párrafo anterior, podemos concluir que el orden prefijado $\prec$ ordena el conjunto de historias en H^* de la misma manera en que el orden canónico de los reales $<$ ordena el conjunto de instantes E. Pero, dado que $\prec$ constituye un buen orden en H^*, se sigue que el orden canónico de los números reales debe ordenar bien el subconjunto E.

Ahora bien, sabemos que si un conjunto de números reales se encuentra bien ordenado por medio del orden canónico, entonces dicho conjunto solo puede ser, a lo sumo, tan grande como el conjunto de los números naturales. De ello se sigue que el conjunto de instantes E para los que obtuvimos una predicción equivocada no puede ser mayor que el conjunto de los números naturales; el cual, dentro de los reales, es un conjunto de medida cero (lo que sugiere que la probabilidad de equivocarnos si utilizamos el método anterior es prácticamente nula).

Que la medida del conjunto de errores sea nula nos permite afirmar que el *tamaño* del conjunto de instantes en los que hemos errado resulta insignificante en comparación con el del conjunto de aciertos. En otras palabras, podemos asegurar que nuestro método nos garantiza que acertaremos «casi siempre» en nuestras predicciones sobre el futuro.

El resultado que hemos descrito se debe a Christopher Hardin y Alan Taylor, quienes llegaron a él generalizando la solución de problemas parecidos a nuestro primer ejemplo. Sin embargo, tal y como ellos mismos aclaran en su artículo, se trata de un resultado puramente matemático que no ofrece ninguna estrategia factible para predecir el futuro. Que exista un método idealizado con las características descritas por Hardin y Taylor no significa que podamos acceder a él; para ello, deberíamos hallarnos en condiciones de fijar un buen orden en el conjunto de funciones que asocian números reales a números reales. Y aunque el axioma de elección implica que existen modos de «ordenar bien» un conjunto, no nos dice cómo encontrar uno.

Lamentablemente, si lo que queríamos era hallar una respuesta satisfactoria al problema de la inducción de Hume, deberemos buscar en otra parte.

PARA SABER MÁS

El artículo de Hardin y Taylor, **A peculiar connection between the axiom of choice and predicting the future**, apareció en *American Mathematical Monthly*, vol. 115, n.º 2, págs. 91-96 en febrero de 2008.